

Chapitre 4 : Le régime magnéto-stationnaire

Analogie avec la mécanique des fluides :

I- Distributions de courants :

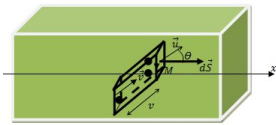
a) **Intensité I du courant électrique et vecteur densité de courant \vec{j}**

L'intensité I ($[I] = A$) du courant mesure la charge électrique traversant une surface S (orientée) d'un support conducteur par unité de temps.

1^{re} définition : Si δq est la charge traversant S pendant dt alors : $I = \frac{\delta q}{dt}$

Soit n_m ($[n_m] = m^{-3}$) la densité volumique de particules de charges q mobiles responsables du courant étudié. On définit alors :

- la densité volumique de charges mobiles ρ_m ($[\rho_m] = C.m^{-3}$) par $\rho_m = n_m q$
- le vecteur densité de courant $\vec{j} = \rho_m \vec{v}$ ($[j] = A.m^{-2}$) afin de caractériser la répartition du courant.
- un élément de surface $d\vec{S}$ de la section droite S du conducteur (son orientation fixe celle du courant)



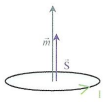
2^{de} définition : L'intensité I du courant traversant une section S est caractérisé par son vecteur densité de courant \vec{j} est $I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$

b) **Circuit filiforme**

Il s'agit typiquement d'un conducteur de rayon R , de longueur l tel que $R \ll l$ et alors assimilé à un circuit purement linéique. \vec{j} est alors considéré uniforme sur $S = \pi R^2$ et de même direction que \vec{S} : $I = \pm |\vec{j}| S$.

c) **Dipôle magnétique**

Un circuit fermé, rigide et traversé par un courant est appelé dipôle magnétique.



Pour caractériser les propriétés magnétiques d'un dipôle magnétique de surface S orientée, on définit le moment dipolaire \vec{m} : $\vec{m} = I \vec{S}$ avec I intensité du courant de la boucle

Pour rappel, nous avons vu pour un écoulement :

D_m ($[D_m] = [kg.s^{-1}]$) mesure la masse de fluide traversant une surface S par unité de temps.

1^{re} définition : Si δm est la masse traversant la surface ouverte et orientée S pendant dt alors : $D_m = \frac{\delta m}{dt}$

2^{de} définition : le débit massique à travers une surface S représente le flux du vecteur $\rho(M)\vec{v}(M)$ à travers S . On définit donc le vecteur densité de flux de masse de l'écoulement $\vec{j}(M) = \rho(M)\vec{v}(M)$, $[j] = [kg.m^{-2}.s^{-1}]$ ainsi : $D_m = \iint_S \vec{j}(M) \cdot d\vec{S}(M)$.

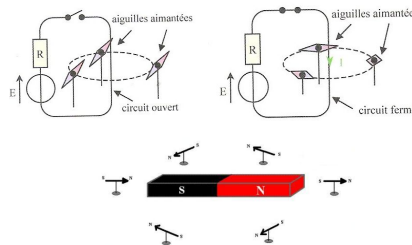
Conventions électriques

--	--	--	--

Avec cette convention, $I > 0$ s'il est orienté dans le sens de déplacement des charges positives ou dans le sens inverse de déplacement des charges négatives.

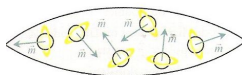
Historique

Oestred montra, en 1820, qu'un fil électrique parcouru par un courant parvient, comme un aimant, à orienter l'aiguille d'une boussole (petit aimant placé sur un axe) placée à proximité.



Cette expérience a permis de montrer qu'un courant électrique avait, comme un aimant, des propriétés magnétiques.

La matière est constituée d'atomes. Le seul mouvement des électrons autour du noyau explique la présence de boucles de courant (ou dipôle magnétique) au sein même de la matière (il y a aussi la rotation de l'électron sur lui-même et la rotation du noyau sur lui-même) :



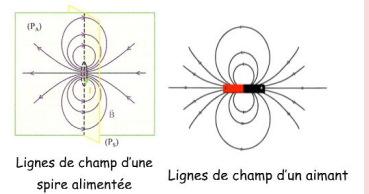
Commenté [A1]: Problématique : Quelles sont les analogies et différences entre le champ électrostatique et magnéto-statique ?

Commenté [A2]: On parle malheureusement souvent de champ magnéto-statique.

Commenté [A3]: Cette quantité peut être positive ou négative

Commenté [A4]: On utilisera ce vecteur de façon analogue aux vecteur densité de flux de masse, au vecteur densité de flux de chaleur. Il aurait pu s'appeler vecteur densité de flux de charges

Commenté [AM5]: Le dipôle magnétique est donc pertinent tant à l'échelle macroscopique (la spire étant un motif permettant de décrire les solénoïdes, les tores, ...) qu'à l'échelle microscopique (un électron gravitant autour de son noyau décrit bien une boucle de courant).



\vec{m} (moment dipolaire) est un vecteur associé à chaque boucle de courant et caractérisant le champ magnétique qu'elle rayonne. On distingue alors plusieurs types de matériaux. Par exemple les ferromagnétiques (moment dipolaire résultant non nul) et les diamagnétiques (moment dipolaire résultant nul).

En 1905, donna une interprétation relativiste de l'origine de l'interaction entre charges en mouvement : la contraction des longueurs liée au mouvement des charges impliquent une accumulation de charge et donc un champ électrique mesuré dans le référentiel lié aux charges en mouvement. Le champ magnétique est donc la traduction, dans le référentiel du laboratoire, des champs électriques issus des contractions des longueurs dans le référentiel des charges mobiles.

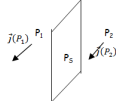
Chapitre 4

EM

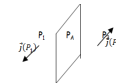
TS12

d) Plan de symétrie et d'antisymétrie de la distribution de courant :

Un plan (P_s) est appelé plan de symétrie d'une distribution de courant, si en deux points P_1 et P_2 , symétriques par rapport à (P_s) on a un vecteur densité de courant qui vérifie : $\vec{j}(P_1) = [\text{Sym}(\vec{j}(P_2))]_{(P_s)}$



Un plan (P_a) est appelé plan d'antisymétrie d'une distribution de courant, si en deux points P_1 et P_2 , symétriques par rapport à (P_a) on a un vecteur densité de courant qui vérifie : $\vec{j}(P_1) = -[\text{Sym}(\vec{j}(P_2))]_{(P_a)}$



II- Force magnétique de Laplace et Champ magnétique

a) Formule de Laplace

La force exercée sur un circuit placé dans un champ magnétostatique \vec{B} et parcouru par un courant d'intensité I constante vérifie : $\vec{F} = \int_{M \in \text{circuit}} I \vec{dl}(M) \wedge \vec{B}(M)$

$\vec{dl}(M)$: Élément de longueur centré en un point M , orienté dans le sens de I du circuit et subissant la force de Laplace et $\vec{B}(M)$: Champ magnétostatique au point M .

b) Expression du champ magnétique : énoncés des équations de Maxwell

Les équations de Maxwell de la magnétostatique relient le champ magnétostatique \vec{B} à sa source (source décrite par le vecteur densité de courant \vec{j}) :

Equation de Maxwell-Ampère $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ et équation de Maxwell-flux $\vec{\text{div}} \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

μ_0 est une constante appelée perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{H} \cdot \text{m}^{-1}$

c) Conséquences

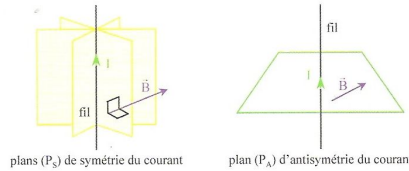
i) Champ à flux conservatif

$\vec{\text{div}} \vec{B}(M) = 0$ implique que le champ est à flux conservatif :

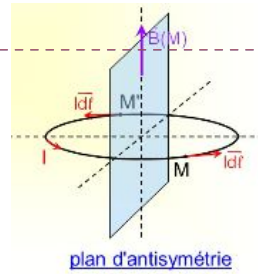
- Un resserrement (un évasement) d'un tube de champ se traduit par une augmentation (une diminution) du champ
- Le flux du champ magnétique à travers une surface ouverte S ne dépend que du contour sur lequel repose S . Il ne peut exister une convergence vers un point ou une divergence à partir d'un point des lignes de champ magnétique

Exemples d'analyses de symétrie

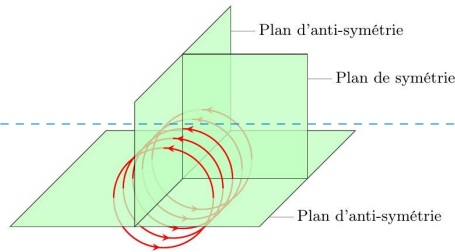
Exemple d'un fil infini



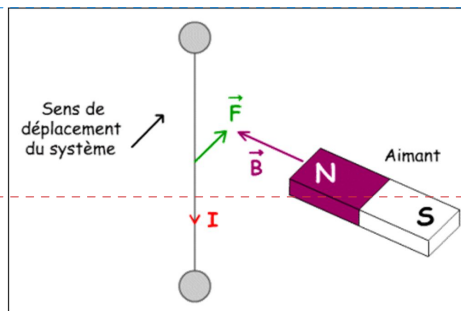
Exemple d'une spire



Exemple du solénoïde



Force de Laplace



Commenté [A6]:
<http://phymain.unisciel.fr/faire-osciller-le-filament-d'une-lampe/>
<http://si.lycee-desfontaines.eu/spip.php?article32>
<http://www.ampere.cnrs.fr/parcourspedagogique/zoom/vidéo/aimants/video/aimants.php>

Commenté [AM7]: On voit une analogie avec la force électrique : un circuit d'essai permet d'apprécier le rayonnement magnétique d'un autre circuit. On voit cependant que le \vec{E} est remplacé par un $\wedge \vec{B}(M)$

Commenté [AM8]: Nous ne travaillerons pas avec l'analogie de la loi de Coulomb, appelée loi Biot et Savart : $d\vec{B} = \frac{\mu_0 I dl(P) \wedge \vec{PM}}{4\pi PM^3}$

Commenté [A9]: Ces équations sont à prendre comme des lois (au même titre que la loi de Coulomb peut s'écrire de manière équivalente en deux équations de Maxwell)

Commenté [A10]: Analyse numérique : http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Elec/Champs/topoB.html
Objectifs : expliquer l'évasement des lignes de champ lorsque l'on s'éloigne d'une spire et le principe de superposition

Commenté [AM11]: Ce résultat exclue l'existence de monopôle magnétique

ii) Propriétés des lignes de champ

$\vec{\text{rot}}\vec{B} = \mu_0\vec{j}$ rend compte du caractère tourbillonnaire du champ magnétostatique qui tend à tourner autour de \vec{j} et donc des sources qui l'engendrent.

Les équations de MA et MFlux en régime stationnaire décrivent des lignes de champ fermées et enlaçant la distribution de courant.

iii) Propriétés de symétrie du champ

La rotation de \vec{B} autour de \vec{j} implique que ces deux champs sont antisymétriques. L'analyse des symétries de la distribution de courant nous renseignera donc sur celle du champ magnétostatique :

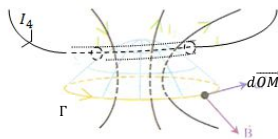
Plan P_s de symétrie de la distribution de courant	Plan P_a d'antisymétrie de la distribution de courant
Si $M' = [\text{Sym}(M)]_{P_s}$ alors $\vec{B}(M') = -[\text{Sym}\vec{B}(M)]_{P_s}$	Si $M' = [\text{Sym}(M)]_{P_a}$ alors $\vec{B}(M') = [\text{Sym}\vec{B}(M)]_{P_a}$
Si $M \in P_s$ alors $\vec{B}(M) \perp P_s$	Si $M \in P_a$ alors $\vec{B}(M) \in P_a$

iv) Invariances du champ

D'après le principe de Curie, le champ magnétostatique possède les mêmes invariances que la fonction densité de courant \vec{j} .

v) Théorème d'Ampère :

D'après le théorème de Stokes, on peut écrire la circulation de \vec{B} sur un contour Γ fermé, orienté, sur lequel repose une surface ouverte (S) orientée corrélativement avec la règle du tire bouchon :



$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{OM} = \iint_S \vec{\text{rot}}\vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_S \mu_0\vec{j} \cdot d\vec{S}$$

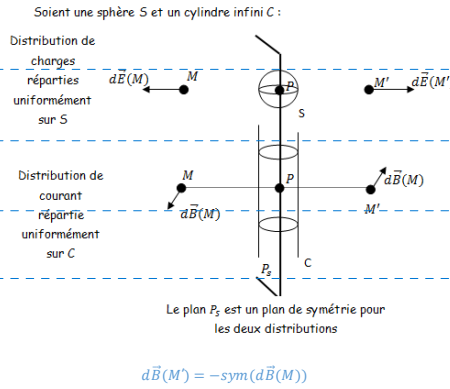
On distingue alors les courants enlacés par Γ (traversant une fois S) et les courants non enlacés par Γ (traversant deux fois S) :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{OM} = \iint_S \mu_0\vec{j}_{\text{enlacé}} \cdot d\vec{S} + \iint_S \mu_0\vec{j}_{\text{non enlacé}} \cdot d\vec{S}$$

$\iint_S \mu_0\vec{j}_{\text{non enlacé}} \cdot d\vec{S} = 0$ car en régime stationnaire le courant est le uniforme sur une branche.

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{OM} = \iint_S \mu_0\vec{j}_{\text{enlacé}} \cdot d\vec{S} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$$

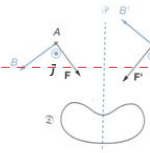
Principe de Curie



$$d\vec{B}(M') = -\text{sym}(d\vec{B}(M))$$

Le principe de Curie reste vérifié car le double produit vectoriel reliant le courant rayonnant et la force rétablit la symétrie entre causes et effets (la force de Laplace !)

Si on considère une distribution de courant D présentant un plan de symétrie \mathcal{P} , alors deux autres circuits filiformes symétriques par rapport à \mathcal{P} subissent une force de Laplace vérifiant le principe de Curie.



Commenté [A12]: <http://phymain.unisciel.fr/champ-magnetique-cree-par-un-fil-rectiligne/>

Commenté [A13]: Il existe des cas où les lignes de champ ne sont pas en apparence fermées. Par exemple, pour le solénoïde infini, la ligne de champ confondue avec l'axe d'une spire semble ne pas se fermer. Cependant, on note une différence notable avec le champ électrostatique qui exclue l'existence de lignes de champ fermées

Commenté [A14]: Nous pouvons encore évoquer le principe de Curie. Les effets (les forces de Laplace) sont bien symétriques par rapport aux causes (la distribution de courant). Le champ magnétique est relié par un produit vectoriel de la force de Laplace, c'est ce qui explique l'antisymétrie de B par rapport au courant

Commenté [A15]: On peut s'en convaincre en se rappelant que l'opérateur rotationnel est défini à partir d'un produit vectoriel $\vec{\text{rot}}\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{B}$ qui implique que $\vec{B} \perp \vec{j}$ ce qui explique l'antisymétrie entre les deux champs

Commenté [AM16]: Les équations de Maxwell sont suffisantes (avec des conditions aux limites) pour résoudre tous les problèmes de magnétostatique. Cependant, pour des situations présentant de « hautes symétries », l'emploi du théorème d'Ampère apparaît plus pertinent

Commenté [AM17]: Il s'agit de la loi des branches, cette loi découle du principe de conservation de la charge qui sera vu au prochain chapitre

Chapitre 4

EM

TS12

Le théorème d'Ampère appliqué sur un contour Γ orienté et fermé permet d'impliquer : $\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{OM} = \mu_0 I_{\text{entiacé}}$. Où $I_{\text{entiacé}}$ est la somme algébrique des courants enlacés par le contour.

III- Applications aux machines tournantes

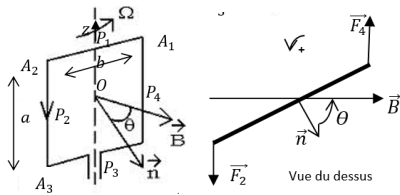
Nous allons considérer une spire C rectangulaire ($a \times b$), susceptible d'être mise en rotation autour de l'axe Oz , parcourue par un courant d'intensité constante I et baignant dans un champ magnétostatique \vec{B} uniforme et perpendiculaire à l'axe Oz .

La force de Laplace qui s'exerce sur la spire vérifie : $\vec{F} = \oint I d\vec{l} \wedge \vec{B} = (\oint I d\vec{l}) \wedge \vec{B}$. Le circuit C étant fermé $\oint d\vec{l} = \vec{0}$ donc la force de Laplace que subit la spire est donnée par : $I [\oint d\vec{l}] \wedge \vec{B} = \vec{0}$

Dans un champ magnétostatique uniforme, la résultante des forces appliquées à un circuit fermé est nulle.

a) Moment des forces de Laplace

Soient $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ et \vec{F}_4 les résultantes des forces de Laplace de chaque côté de C s'appliquant en leur milieu P_1, P_2, P_3 et P_4 .



On peut calculer le moment résultant par rapport à O en déterminant la somme des moments de ces quatre forces :

$$\vec{M}_0 = \vec{M}_0(\vec{F}_1) + \vec{M}_0(\vec{F}_2) + \vec{M}_0(\vec{F}_3) + \vec{M}_0(\vec{F}_4)$$

On remarque alors que : $\vec{M}_0(\vec{F}_1) = \vec{M}_0(\vec{F}_3) = \vec{0}$. En utilisant le bras de levier on trouve : $\vec{M}_0(\vec{F}_2) = \frac{Ia}{2} b B \sin\theta \vec{e}_z = \vec{M}_0(\vec{F}_4)$

$$\vec{M}_0 = IabB \sin\theta \vec{e}_z$$

L'expression du moment du couple de forces de Laplace appliquée à la spire prend ainsi la forme $\vec{M}_0 = \vec{m} \wedge \vec{B}$

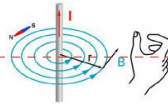
b) Situations d'équilibre et dynamique

La situation d'équilibre stable est celle pour laquelle le flux de \vec{B} à travers la spire est maximal soit $\theta = 0$. Le moment des forces de Laplace explique la mise en mouvement du rotor.

Pour un MCC, le rotor est un circuit dont on inverse l'alimentation à chaque demi-rotation

Pour des machines alternatives, le rotor (dipôle magnétique) baigne dans des champs magnétiques tournant : le rotor « cherchant à s'aligner suivant \vec{B} ».

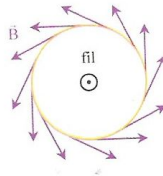
Exemple du fil conducteur supposé infini et traversé par un courant et décrit en cylindrique :



On peut repérer le plan de symétrie ($\vec{u}_r, M, \vec{u}_\theta$) pour cette distribution de courant : \vec{B} est perpendiculaire à ce plan.

On peut repérer le plan d'antisymétrie ($M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta$) pour cette distribution de courant : \vec{B} appartient à ce plan.

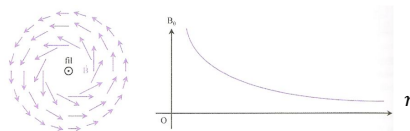
Nous savons que $\vec{B} = B_\theta(r) \vec{u}_\theta$ en repérage cylindrique car $\vec{j}(r)$. Les lignes de champ sont donc circulaires et centrées sur le fil.



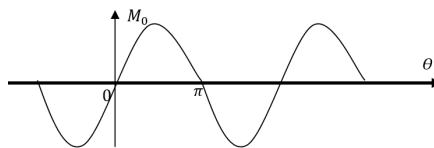
Le choix d'un contour d'Ampère circulaire de rayon r assure un calcul simple de la circulation du champ et

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{OM} = \oint B(r) r d\theta = 2\pi r B(r) = \mu_0 I$$

D'où $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$



Position d'équilibre

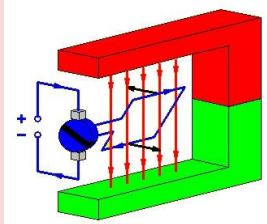


En s'écartant de la position d'équilibre $\theta_{eq1} = 0$ le moment va tendre à ramener la spire en θ_{eq1} . Alors qu'en θ_{eq2} la spire tendra toujours à revenir θ_{eq1} .

La situation où le champ magnétique extérieur appliqué est dans le sens du moment magnétique est la situation d'équilibre stable. Cette situation d'équilibre stable s'accompagne alors d'un flux maximal traversant le dipôle : on parle de la règle du flux maximal

Commenté [AM18]:

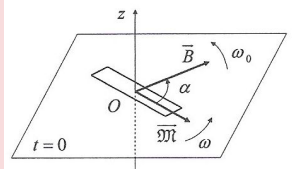
Modèle simplifié du MCC



Pour les machines alternatives, le champ tournant est réalisé avec un bobinage

(<https://www.youtube.com/watch?v=lpQNR8rKHk>)

Pour un moteur synchrone, le rotor est dans une 1^{ère} approche, modélisable par un aimant



Pour le moteur asynchrone, le rotor est un autre bobinage et ce sont les phénomènes d'induction qui sont responsables de la mise en mouvement du rotor.

