Chapitre 2 : Potentiel électrostatique - Energie potentielle électrostatique

A- Force, énergie potentielle et potentiel électrostatiques :

1) Energie potentielle électrostatique

Soit une distribution D constituée d'une seule charge ponctuelle q_P placée au point O (origine d'une base sphérique). Une charge d'essai q_M placée en M subit la force électrostatique $\vec{f} = \frac{q_p q_M}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u_r}$.
Le travail élémentaire de cette force est donné par :$\delta W = \vec{f}.\overrightarrow{dOM}$ et pour un contour quelconque $A \xrightarrow{r} B$ on remarque que ce travail est indépendant du chemin suivi :

$$W = \int_{\substack{r \\ A\to B}} \vec{f}.\overrightarrow{dOM} = \int_{\substack{r \\ A\to B}} \frac{q_p q_M}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.dr = \frac{q_p q_M}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_A}^{r_B} = \frac{q_p q_M}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

Cette force est conservative et dérive d'une énergie potentielle E_p :

$$\vec{f} = -\overrightarrow{grad}E_p \text{ (ou : } \vec{f}.\overrightarrow{dOM} = -dE_p).$$

L'énergie potentielle électrostatique de la charge d'essai q_M en M placée dans le champ électrostatique de la charge q_p est donc :

$$dE_p = -\frac{q_p q_M}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.dr \rightarrow E_p = \frac{q_p q_M}{4\pi\varepsilon_0 r} + cte \xrightarrow{E_p(\infty)=0} E_p = \frac{q_p q_M}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

2) Potentiel électrostatique

On pose $E_p = q_M V(M)$ où $V(M) = \frac{q_p}{4\pi\varepsilon_0 r}$ est appelé potentiel électrostatique associée à la charge q_p. $V(M)$ est exprimé en Volt (V)

3) Relation entre potentiel et champ électrostatique

Donc : $\vec{f} = q_M\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}E_p = -\overrightarrow{grad}q_M V(M)$.

Donc : $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}V(M)$ ou $\vec{E}(M).\overrightarrow{dOM} = -dV(M)$.

Entre deux points A (de potentiel V_A) et B (de potentiel V_B) : $\int_A^B \vec{E}(M).\overrightarrow{dOM} = -\int_{V_A}^{V_B} dV(M) = V(A) - V(B)$

4) Propriétés du potentiel électrostatique

La relation $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}V(M)$, généralisable à toute distribution (superposition de charges ponctuelles), implique plusieurs propriétés :

- Le champ électrostatique est dirigé vers les potentiels décroissants
- Le champ électrostatique est perpendiculaire aux courbes (ou surfaces) équipotentielles.
- Une discontinuité du potentiel ($\|\overrightarrow{grad}V(M)\| \rightarrow \infty$) entraînerait un champ électrostatique infini ce qui est physiquement impossible : le potentiel électrostatique est une fonction continue de l'espace.
- Le potentiel est une fonction présentant également les mêmes symétries et antisymétries que la distribution de charges associée.

Rappel sur l'énergie potentielle

Les forces conservatives permettent la conversion de l'énergie cinétique en énergie potentielle à énergie mécanique totale constante. Pour ce type de force :

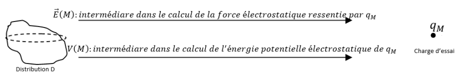
$$dW = -dE_p = \vec{f_c}.\overrightarrow{dOM}$$

Par définition de la différentielle d'une fonction de l'espace :

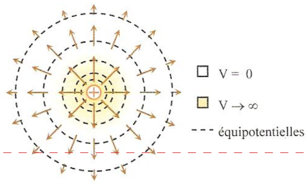
$$dE_p = \overrightarrow{grad}E_p.\overrightarrow{dOM}$$

Par identification : $\vec{f_c} = -\overrightarrow{grad}E_p$

$E_p, V, \vec{f}, \vec{E}$



Cas d'une charge ponctuelle



Potentiel et courbes équipotentielles.

Commenté [A1]: **Problématique : Qu'est qu'une tension ? Expérience : Claquage d'un néon avec un Wimshurtz** **http://phys.free.fr/whimhu.htm**

Commenté [A2]: On rappelle que l'énergie potentielle est une « énergie cinétique en réserve ». La notion d'énergie potentielle est évidente si l'on reprend toutes les expériences de triboélectricité du chapitre 1 : on observe une création d'énergie cinétique car des charges sont mises en mouvement. Il nous reste à relier ce potentiel au champ électrostatique !

Commenté [A3]: Entre deux points distants, on peut repérer une différence de potentielle associée à une différence d'énergie potentielle. Le terme potentiel est malheureusement utilisé pour des situations pour lesquelles il n'y a pas d'accumulation de charges statiques. Par exemple en régime continu et aux bornes d'une résistance, il n'y a pas d'accumulations de charges…pourtant on parle de différence de potentiel. En fait, il règne un champ électrique dont les conséquences sont analogues à celui d'un champ électrostatique. Ce champ sera détaillé au chapitre 7 (il s'agit d'un champ électromoteur)

Commenté [A4]: Cette relation met en évidence que la contrainte électrique s'accompagne d'un niveau d'énergie variant dans l'espace

Commenté [A5]: Ainsi une différence de potentiel est reliée à la circulation du champ électrique (et donc au travail de la force électrique)

Commenté [A6]: Le potentiel électrostatique n'est cependant pas défini en certains points pour certaines distributions idéales (ponctuelles et linéiques)http://www.ampere.cnrs.fr/parcourspedagogique/zoom/video/pointes/video/pointes.php http://culturesciencesphysique.ens-lyon.fr/XML/db/csphysique/metadata/LOM_CSP_QRorages.xml Documents 1,2,3

B- Potentiel électrostatique d'une distribution quelconque :

1) Potentiel électrostatique d'une distribution discrète de N charges ponctuelles

A chacune des q_{Pi} charges placées aux points P_i on peut associer un potentiel électrostatique $V_i(M) = \frac{q_{Pi}}{4\pi\varepsilon_0 P_i M}$. Le potentiel total suit également le principe de superposition : $V(M) = \sum_{i=1}^{N} V_i(M) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_{Pi}}{4\pi\varepsilon_0 P_i M}$

2) Distribution continue de charges

En considérant une portion de charge élémentaire $dq(P)$ centrée autour d'un point P, on peut donc lui associer un potentiel électrostatique en un point M : $dV(M) = \frac{dq(P)}{4\pi\varepsilon_0 PM}$. En appliquant le principe de superposition, on obtient le potentiel électrostatique associé à une distribution continue de charges D : $V(M) = \int_D \frac{dq(P)}{4\pi\varepsilon_0 PM}$

Charge élémentaire

Avec $dq(P) = \rho(P)dV$ pour une distribution volumique, $dq(P) = \sigma(P)dS$ pour une distribution surfacique, $dq(P) = \lambda(P)dl$ pour une distribution linéique.

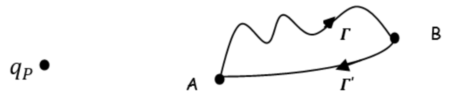
Du potentiel au champ électrique

La connaissance du potentiel électrostatique associé à une distribution de charges permet, avec la relation $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}V(M)$ ou $\vec{E}(M).d\overrightarrow{OM} = -dV(M)$, de trouver l'expression du champ $\vec{E}$.

C- Circulation du champ électrostatique

1) Circulation du champ électrostatique d'une charge ponctuelle (document 1,2 e 3)

Examinons la circulation C_{AB} du champ électrostatique rayonné par une charge ponctuelle q_P sur un contour quelconque Γ orienté d'un point A à un point B : $C_\Gamma = \int_{A\to B}^{\Gamma} \vec{E}(M).d\overrightarrow{OM} = \frac{q_P}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$.



La circulation, entre deux points A et B , du champ électrostatique rayonné par une charge ponctuelle :

- Est mesurée par la variation du potentiel électrostatique $C_{AB} = \int_{\Gamma(A\to B)} \vec{E}(M).d\overrightarrow{OM} = -\int_{\Gamma(A\to B)} dV = V(A) - V(B)$
- Est nulle pour tout contour fermé $\oint \vec{E}.d\overrightarrow{OM} = 0$
- Ne dépend pas du contour ouvert considéré

2) Circulation du champ électrostatique d'une distribution quelconque

D'après le principe de superposition, $\oint \vec{E}.d\overrightarrow{OM} = 0$ est valable pour le champ électrostatique créé par toute distribution de charges. La circulation conservative du champ électrostatique implique que :

- Les lignes de champ électrostatique sont nécessairement ouvertes
- Le champ électrostatique n'est pas tourbillonnaire, ainsi d'après le théorème de Stokes $\oint \vec{E}.d\overrightarrow{OM} = \iint_S \overrightarrow{rot}\vec{E}.d\vec{S} = 0$ soit $\overrightarrow{rot}\vec{E} = \vec{0}$ (équation de Maxwell-Faraday en stationnaire).
- $\overrightarrow{rot}\vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{0}$ ce qui implique aussi l'existence du potentiel scalaire V car : $\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\overrightarrow{grad}V$

Topographie des lignes de champ électrostatique

En postulant l'existence d'une ligne de champ fermée, on assure en tout point M de cette dernière que $\vec{E}.d\overrightarrow{OM} \neq 0$ et ainsi $\oint \vec{E}.d\overrightarrow{OM} \neq 0$. Ce résultat s'oppose à la loi de Coulomb ! Nous devons rejeter l'existence de lignes de champ électrostatique fermées

Commenté [A7]: Il peut être intéressant de mesurer l'énergie potentielle d'une telle distribution.
Pour amener une charge q_{Pi}, l'opérateur fournit : $q_{Pi}V_j$ où V_j est le potentiel des j autres charges. Pour les N charges, on a une énergie potentielle électrostatique donnée par $E_p = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_{Pi}V_i$ avec $V_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} V_j$. Le facteur ½ permettant d'éviter de compter deux fois la même contribution

Commenté [A8]: D'après le principe de superposition :
$\vec{E}.d\overrightarrow{OM} = -dV$
$\sum_{i=1}^{N} \vec{E_i}.d\overrightarrow{OM} = -\sum_{i=1}^{N} dV_i = -dV$
Donc, en prenant $V(\infty) = 0$, on $\int_\infty^M dV = \int_\infty^M \sum_{i=1}^{N} dV_i = \sum_{i=1}^{N} \int_\infty^M dV_i = \sum_{i=1}^{N} V_i(M)$

Commenté [A9]: Pour une distribution continue de charges, l'énergie potentielle ne peut plus être calculée sans exclure le potentiel de la charge dont on veut l'énergie potentielle. On définit alors une énergie électrique U_e:
$U_e = \frac{1}{2}\iiint_V \rho V d\tau.$
Ce résultat permet de définir une densité d'énergie électromagnétique. En effet, nous verrons que $div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ donc :
$U_e = \frac{\varepsilon_0}{2}\iiint_V div(\vec{E})V d\tau$
D'après l'analyse vectorielle :
$U_e = \frac{\varepsilon_0}{2}(\iiint_V div(V\vec{E})d\tau - \iiint_V \vec{E}\overrightarrow{grad}(V)d\tau)$
D'après Ostrogradski :
$U_e = \frac{\varepsilon_0}{2}(\oiint V\vec{E}d\vec{S} - \iiint_V \vec{E}\overrightarrow{grad}(V)d\tau)$
Pour ce raisonnement $VE \propto \frac{1}{r^3}$ alors que $dS \propto r^2$ $donc\ la\ première\ intégrale\ tend\ vers\ 0$
$U_e = \iiint_V \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} d\tau$

Commenté [A10]: Le champ électrostatique est un champ de vecteurs, nous allons donc le caractériser par sa circulation et son flux

Commenté [A11]: Cette relation met en évidence que la contrainte électrique s'accompagne d'un niveau d'énergie variant dans l'espace

Commenté [A12]: Cette méthode est en générale plus simple pour obtenir le champ électrostatique car le potentiel est scalaire