

Optique

Interférence avec le dispositif des trous d'Young et par un réseau

Introduction

TSI 2

I) Modèle scalaire de la lumière

A) Hypothèses de travail :

Nous allons modéliser la lumière émise par un atome se désexcitant (assimilable à une source ponctuelle située en S) par une vibration de type OPPH dont l'amplitude en M est donnée par : $a(M, t) = A_0 \cos(\omega(t - \frac{SM}{v}) + \varphi)$

Avec $v = \frac{c}{n}$ la vitesse de propagation dans le milieu d'indice n. On définit le chemin optique (SM) = n x SM. On écrit alors :

$$a(M, t) = A_0 \cos(\omega t - \frac{\omega}{c}(SM) + \varphi)$$

$$a(M, t) = A_0 \cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0}(SM) + \varphi)$$

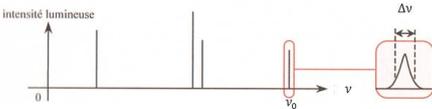
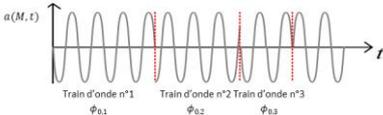
Rq : La notion de vibration lumineuse remplace celle de champ électrique mais le principe de superposition reste applicable : la vibration lumineuse totale en M et la somme des vibrations arrivant en ce point à l'instant t : $a(M, t) = \sum a_i(M, t)$

On définit l'éclairement en $W.m^{-2}$ comme la quantité associée à la moyenne de la norme du vecteur de Poynting : $\mathcal{E}(M) = 2K \langle a^2(M, t) \rangle$

Avec K constante.

B) Critique du modèle scalaire et de la source ponctuelle

La lumière n'est jamais purement monochromatique et d'extension infinie. Un photon est plus justement modélisé par un train de vibrations de longueur $l_c = v \times \tau$ où τ est le temps pendant lequel le photon est émis par l'atome-source. D'après l'analyse Fourier cela se traduit aussi par une vibration qui n'est pas parfaitement monochromatique $\Delta\nu \approx \frac{1}{\tau}$ avec $\nu \approx 10^{14} Hz$ pour le visible.



Lumière blanche	Lampe spectrale	Laser
$\tau \approx 10fs$	$\tau \approx 1ns$	$\tau \approx 1\mu s$
$l_c \approx 1\mu m$	$l_c \approx 10cm$	$l_c \approx 100m$
$\Delta\lambda = \frac{c}{\tau\nu^2} \approx 1\mu m$	$\Delta\lambda \approx 10pm$	$\Delta\lambda \approx 10fm$

Une source de lumineuse :

- Émet une multitude de vibrations, appelées train d'ondes, se succédant avec des phases à l'origine différentes donc $\varphi = \varphi(t)$.
- Chaque vibration n'est rigoureusement pas monochromatique

La nature ondulatoire de la lumière est correctement décrite par les équations de Maxwell et donc par une analyse vectorielle. Dans le vide, l'OemPPH polarisée rectilignement apparaît comme un maillon élémentaire pour décrire tous les champs. La connaissance de la composante scalaire donnant l'expression du champ électrique est alors suffisante pour décrire ce motif :

l'optique ondulatoire fait l'hypothèse violente d'écartier le caractère vectoriel de la lumière en assimilant toute onde lumineuse à une grandeur scalaire...Il ne faudra donc pas s'étonner des limites du modèle si l'on superpose des ondes lumineuses dont la polarisation est différente!

En notation complexe :

Les équations linéaires de Maxwell, nous autorisent à utiliser la notation complexe :

$$a(M, t) = A_0 \cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0}(SM) + \varphi)$$

$$\rightarrow \underline{a}(M, t) = A_0 e^{j(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0}(SM) + \varphi)}$$

On définit également l'amplitude complexe :

$$\underline{a}(M) = \underline{A_0} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda_0}(SM)}$$

Avec $\underline{A_0} = A_0 e^{j\varphi}$

Il faut prendre des précautions pour calculer l'éclairement avec la notation complexe :

$$\mathcal{E}(M) = K \langle \text{Re}(\underline{a}(M, t) \underline{a}^*(M, t)) \rangle$$

Dans le cas de vibrations de même pulsation :

$$\mathcal{E}(M) = K \langle \text{Re}(\underline{a}(M) \underline{a}^*(M)) \rangle = K |a^2(M)|$$

Pourquoi une valeur moyenne ?

Ce calcul de l'éclairement est une valeur moyenne car, dans le visible la période typique de la lumière est de $10^{-15}s$ alors que le temps de réponse des capteurs usuels est beaucoup plus grand :

Temps de réponse de l'oeil	Temps de réponse photodiode, capteur ccd
$\approx 10ms$	$\approx 1ns$

Bilan sur notre modèle

- Le modèle d'une source ponctuelle ne pourra pas être assuré expérimentalement
- Le modèle d'une source d'ondes planes parfaitement monochromatiques ne pourra pas être assuré

Pour s'en rapprocher, nous utiliserons :

- Des lasers (source quasi-monochromatiques)
- Des sources blanches diaphragmées accompagnées d'un collimateur avec éventuellement un filtre

Commenté [A1]: Une source étendue émet des vibrations non cohérentes en chaque point car elles sont inévitablement de pulsation et de phase à l'origine différentes en étant émise par des atomes différents. On se rapproche de ce modèle avec un diaphragme

Commenté [A3]: Ce modèle reste pertinent car la lumière blanche peut être vue comme formée par deux OemPP polarisées perpendiculairement, les lasers sont des OemPP polarisées rectilignement.

Commenté [AM2]: Ces différences sont liées au principe d'émission associés à ces sources :
 -La lumière « blanche » est de spectre large car son origine est liée au mouvement d'agitation thermique quelque peu chaotique de particules
 -L'excitation d'un gaz monoatomique va être associés à quelques transitions énergétiques et donc quelques raies
 -Le laser repose sur le principe d'émission stimulé permettant d'obtenir un train d'ondes de grande longueur

C) Cas de deux sources ponctuelles

Soient deux source ponctuelles situées aux points S_1 et S_2 émettant deux vibrations lumineuses :

$$\begin{cases} a_1(M, t) = A_{01} \cos\left(\omega_1 t - \frac{2\pi}{\lambda_{01}}(S_1 M) + \varphi_1(t)\right) = A_{01} \cos(\phi_1(M, t)) \\ a_2(M, t) = A_{02} \cos\left(\omega_2 t - \frac{2\pi}{\lambda_{02}}(S_2 M) + \varphi_2(t)\right) = A_{02} \cos(\phi_2(M, t)) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}(M) = 2K \langle a^2(M, t) \rangle = 2K \langle (a_1(M, t) + a_2(M, t))^2 \rangle$$

$$\mathcal{E}(M) = 2K \left(\frac{A_{01}^2}{2} + \frac{A_{02}^2}{2} + 2A_{01}A_{02} \langle \cos(\phi_1(M, t)) \cos(\phi_2(M, t)) \rangle \right)$$

Avec les relations trigonométriques et en note $\mathcal{E}_1 = KA_{01}^2$ et $\mathcal{E}_2 = KA_{02}^2$ l'éclairement des deux sources prises isolément :

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + 2\sqrt{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2} \langle \cos(\phi_1 + \phi_2) + \cos(\phi_2 - \phi_1) \rangle$$

Si les deux vibrations sont de même fréquence et de même phase à l'origine (on dit qu'elles sont cohérentes) alors : $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$, $\lambda_{01} = \lambda_{02}$ et $\omega_1 = \omega_2$: $\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + 2\sqrt{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2} \cos(\phi_2 - \phi_1)$

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + 2\sqrt{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}((S_2 M) - (S_1 M))\right)$$

On définit la différence de marche δ entre les deux rayons par :

$$\delta = ((S_2 M) - (S_1 M))$$

On obtient la relation de Fresnel décrivant les interférences à deux ondes cohérentes :

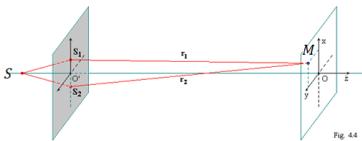
$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + 2\sqrt{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2} \cos(\phi_2 - \phi_1)$$

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + 2\sqrt{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta\right)$$

II- Les trous d'Young

a) Présentation

Pour obtenir deux sources cohérentes, on perce un écran de 2 trous S_1 et S_2 distants de a . On observe l'éclairement à une distance D (l'ensemble baignant dans un milieu homogène d'indice n). La source S , quasi ponctuelle et monochromatique, est obtenue à l'aide d'un laser éventuellement diaphragmé.



On utilise les dimensions suivantes : $a \approx 0,5mm$, taille des trous $b \approx 0,1mm$, $D \approx 1,5m$

En notation complexe :

L'amplitude de la vibration lumineuse totale est alors donnée par : $a(M, t) = a_1(M, t) + a_2(M, t)$

Avec $a_1(M, t) = A_0 \cos\left(\omega_0 t - \frac{2\pi}{\lambda_0}(S_1 M)\right)$

soit $\underline{a}_1(M) = A_0 e^{-j\frac{2\pi}{\lambda_0}(S_1 M)}$

Et : $a_2(M, t) = A_0 \cos\left(\omega_0 t - \frac{2\pi}{\lambda_0}(S_2 M)\right)$ soit $\underline{a}_2(M) = A_0 e^{-j\frac{2\pi}{\lambda_0}(S_2 M)}$

L'éclairement $\mathcal{E}(M)$ au point M est donné par :

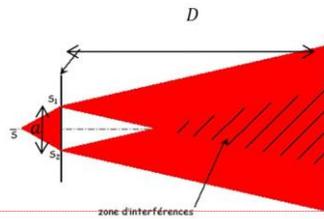
$$\mathcal{E} = K \underline{a}(M) \times \underline{a}^*(M)$$

$$\mathcal{E} = K \left((\underline{a}_1(M) + \underline{a}_2(M)) \times (\underline{a}_1^*(M) + \underline{a}_2^*(M)) \right)$$

$$\mathcal{E} = 2\mathcal{E}_0 (1 + \cos \Delta\phi)$$

Nécessité de la diffraction

Pour comprendre pleinement la possibilité d'une superposition de rayons passant par S_1 et S_2 il faut évoquer le phénomène de diffraction. Les trous S_1 et S_2 de diamètre b diffractent la lumière ce qui crée deux cônes de lumière (d'ouverture angulaire de l'ordre de $2\frac{\lambda_0}{D}$) pouvant se recouvrir.

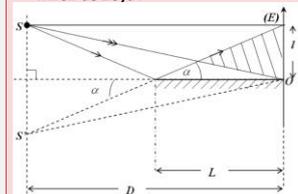


Commenté [AM4]: A ce stade on note que si les vibrations ne sont pas cohérentes alors $\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$. Alors que si elles le sont : $\mathcal{E}(M) \neq \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$. Cette observation constitue le phénomène d'interférence.

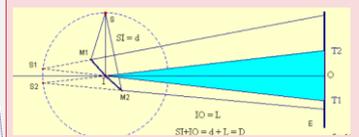
Commenté [A5]: Il s'agit d'une expérience fondamentale. Elle a permis de vérifier le caractère quantique du photon en montrant qu'il est impossible de savoir dans quelle fente un photon passe : la mécanique décrit l'état d'une particule par une superposition des états possibles.

Commenté [AM6]: Bien que limité aux trous d'Young, ce cours explique également d'autres dispositifs interférentiels se ramenant à deux sources ponctuelles distance de a .

-Miroir de Lloyd :



-Miroirs de Fresnel :



Commenté [A7]: C'est un dispositif à division du front d'onde.

Optique

TSI 2

b) Expression de la différence de marche

$$S_1M = S_1O' + O'M \text{ et } S_2M = S_2O' + O'M$$

Ainsi : $S_1M^2 = (x - \frac{a}{2})^2 + y^2 + D^2$

Et : $S_2M^2 = (x + \frac{a}{2})^2 + y^2 + D^2$

On trouve alors : $S_2M^2 - S_1M^2 = 2ax$

En supposant $x \ll D, y \ll D$ et sachant que $a \ll D$:

$$S_2M - S_1M \approx \frac{2ax}{2D} \text{ donc } \delta \approx n \frac{xa}{D}$$

Le modèle des trains d'ondes impose $\delta < l_c$ ce qui, avec la diffraction, limite le champ d'observation des interférences.

c) Expression de l'éclairement

L'éclairement $\mathcal{E}(M)$ au point M est donné par :

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_0 + 2\sqrt{\mathcal{E}_0\mathcal{E}_0} \cos(\phi_2 - \phi_1)$$

$$\mathcal{E}(M) = 2\mathcal{E}_0(1 + \cos(\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta))$$

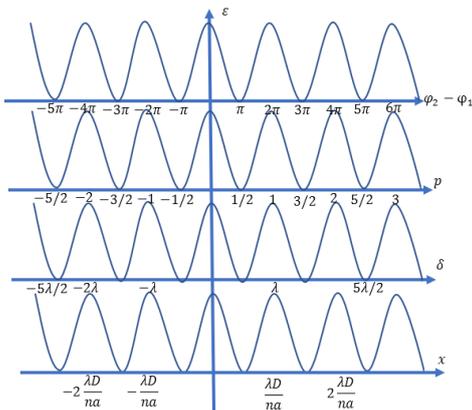
$$\mathcal{E}(M) = 2\mathcal{E}_0(1 + \cos(\frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{xa}{D}))$$

d) Ordre d'interférence

L'éclairement présente donc une périodicité spatiale (franges brillantes, franges sombres) qui est rythmée par l'ordre d'interférence p défini par :

$$p = \frac{\phi_2 - \phi_1}{2\pi} = \frac{\delta(x)}{\lambda_0} = \frac{nxa}{\lambda_0 D}$$

soit $\mathcal{E}(M) = 2\mathcal{E}_0(1 + \cos(2\pi p))$.



Calculons alors l'interfrange i , c'est-à-dire la distance séparant deux franges brillantes ou sombres :

$$p(x+i) - p(x) = 1 \text{ soit } i = \frac{\lambda_0 D}{na}$$

Avec notre dispositif et $\lambda_0 = 500\text{nm}$ $i \approx 1,5\text{mm}$

Autre méthode pour obtenir δ :

En exercice, on pourra être amené à apprécier directement que $\theta \approx \frac{x}{D} \approx \frac{\delta}{a}$

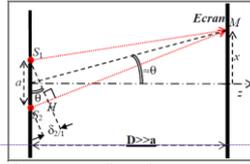
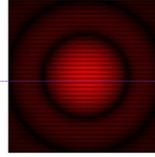
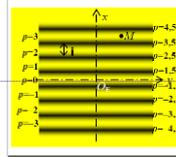
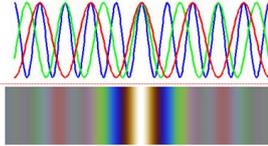


Figure d'interférence

En lumière monochromatique



En lumière blanche



Cohérence spatiale et temporelle

La source S n'est pas ponctuelle mais possède une certaine étendue spatiale. Chaque point source émet des ondes incohérentes avec les autres (pulsations différentes et phases à l'origine différentes). L'éclairement est alors la somme des éclairements associés à chaque point. Ces figures d'interférence sont décalées et se brouillent, si le contraste reste bon (source peu étendue) alors on dit qu'il y a cohérence spatiale. La source S n'est pas monochromatique, mais émet dans une certaine largeur spectrale. Chaque longueur donne son propre système de frange avec son interfrange $i = \frac{\lambda D}{a}$: les franges se brouillent. Si le contraste reste bon, on dit qu'il y a « cohérence temporelle » (cas des spectres étroits)

Notion de contraste et expression réelle du contraste

Expérimentalement l'éclairement observé est plutôt donné par : $\mathcal{E}(M) = 2\mathcal{E}_0(1 + V \cos(2\pi p))$ où V est le facteur de visibilité ($|V| \leq 1$). On définit le contraste C ($0 \leq C \leq 1$) des franges afin d'apprécier le degré de cohérence des deux ondes c'est-à-dire leur « capacité à interférer » :

$$C = \frac{\mathcal{E}_{max} - \mathcal{E}_{min}}{\mathcal{E}_{max} + \mathcal{E}_{min}} = \frac{(1+|V|) - (1-|V|)}{(1+|V|) + (1-|V|)} = |V|$$

Les causes d'affaiblissement du contraste sont :

- une source S qui n'est pas ponctuelle. On a superposition et brouillage des figures d'interférences de chaque points sources (incohérentes entre elles)
- une source S qui n'est pas monochromatique. On a superposition et brouillage des figures d'interférence de chaque vibration monochromatique (incohérentes entre elles)

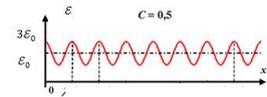
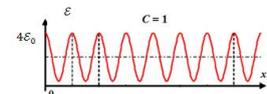
Commenté [A8]: On limite le champ d'observation mathématiquement ce qui est en accord avec le fait que la figure d'interférence est limitée dans l'espace. On parle quand même d'interférence non localisée en ce sens où la zone d'interférence est quand même un peu étendue

Commenté [A9]: Beaucoup de littératures parlent d'intensité lumineuse plutôt que d'éclairement

Commenté [AM10]: A ce stade on note que si les vibrations ne sont pas cohérentes alors $\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$. Alors que si elles le sont : $\mathcal{E}(M) \neq \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$. Cette observation constitue le phénomène d'interférence

Commenté [A11]: On montre en effet que le contraste n'est que faiblement altéré si les trous de ne sont pas exactement de même de la même taille.

Un contraste unitaire est associé à $\mathcal{E}_{max} = 4\mathcal{E}_0$ et $\mathcal{E}_{min} = 0$



Dans le cas où $C = 0,5$ on observe des franges moins brillantes sur un fond uniforme $\mathcal{E}_{min} \neq 0$: ces franges sont donc moins visibles. $C = 0$ correspond à un écran uniforme

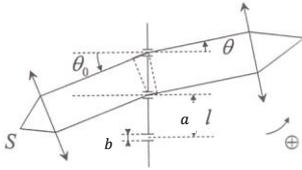
Optique

TSI 2

III- Interférence avec un réseau par transmission

A) Présentation

Un réseau par transmission est constitué de N fentes parallèles, équidistantes d'une distance a (on parle de pas du réseau) et de même largeur b . Typiquement, nous aurons $a \approx 1,5 \mu m, N = 10000, b \approx 500 nm$.



On éclaire un réseau avec un pinceau de lumière parallèle de longueur d'onde $\lambda_0 = 500 nm$ (dans le vide) et on observe la figure d'interférence à l'infini. Les ondes diffractées par chaque motif interfèrent du fait de leur cohérence.

A) Interférences constructives à N ondes

L'additivité des amplitudes complexes de vibration cohérentes entre elles conduit à une amplitude résultante maximale si toutes les ondes sont en phases.

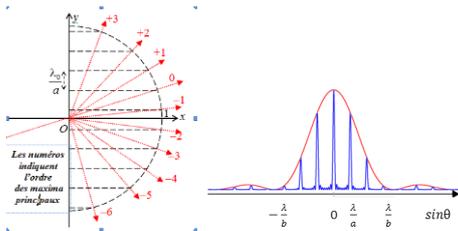
L'éclairement résultant d'interférence entre N ondes cohérentes présente un maximum lorsque toutes les ondes sont en phases (c'est-à-dire avec un même chemin optique à $m\lambda$ près avec $m \in \mathbb{Z}$)

B) Relation fondamentale des réseaux

Entre deux rayons successifs, on mesure la différence de marche $\delta = a(\sin\theta - \sin\theta_0)$

On obtient donc des maxima d'interférence dans les directions $\theta_m: a(\sin\theta_m - \sin\theta_0) = m\lambda_0$

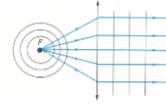
En incidence normale : $\sin\theta_m = \frac{m\lambda_0}{a}$ et comme $\frac{m\lambda_0}{a} \leq 1$ alors $m \leq \frac{a}{\lambda_0}$ donc on peut observer les ordres $-3, -2, -1, 0, 1, 2$ et 3



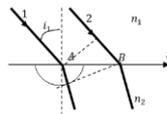
Il est remarquable d'observer que $\theta_m(\lambda)$ (pour $m \neq 0$) : le réseau disperse la lumière car pour un ordre K donné le rouge est plus dévié que le bleu (on obtient un spectre).

Quelques résultats importants d'optique

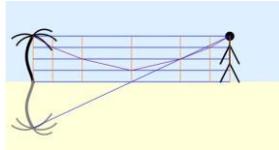
- **Théorème de Malus**: le vecteur d'onde est perpendiculaire à la surface d'onde (ce résultat se comprend aisément en remarquant que toute onde est localement plane). Inversement, localement, toute surface perpendiculaire au rayon est une surface d'onde c'est-à-dire une surface équiphasse)



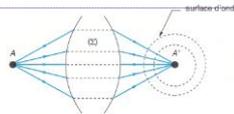
- **Principe d'Huygens-Fresnel**: Chaque point rencontré par la lumière se comporte comme une source secondaire émettant des ondelettes sphériques. C'est ce modèle de la lumière qui permet d'étudier le phénomène de diffraction mais aussi de réfraction



- **Principe de Fermat**: le chemin suivi par la lumière est localement le plus court (ce résultat se comprend également en cellularisation un milieu non homogène en cellule homogènes. Les changements de direction conduisant au chemin optique le plus court vérifient Snell-Descartes):



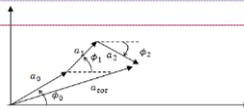
Tout système S stigmatique (comme une lentille mince) introduit un chemin optique nécessairement identique pour tous les rayons passant par le couple de points (A, A') conjugués (ce sont tous les plus courts).



- **Principe de retour inverse de la lumière**: le trajet suivi par la lumière est indépendant de son sens de propagation. Ce qui est en accord avec le principe de Fermat: si L_{AB} est le plus court, L_{BA} aussi!

Représentation de Fresnel

On peut comprendre les résultats ci-contre en représentant vectoriellement l'amplitude complexe de chaque onde. Par exemple pour 3 vibrations : $a_0 e^{j\phi_0}, a_1 e^{j\phi_1}, a_2 e^{j\phi_2}$, on a :



En superposant des ondes en phase, la vibration totale a_{tot} est d'amplitude a_{tot} maximale.

Commenté [A12]: Ce réseau peut être obtenu par gravures de sillons sur une plaque en verre ou par holographie

Commenté [A13]: On pourra noter que la diffraction du motif n'est pas limitante ici puisqu'elle annule l'intensité pour $\sin\theta = \frac{\lambda}{b} = 1$ soit $\theta = 90^\circ$

Commenté [AM17]: $S_{tot}(M)$ peut s'écrire sous la forme d'une somme :
 $S_{tot}(M) = S e^{jk(O_1, M)} (1 + e^{-jk\delta} + e^{-2jk\delta} + \dots + e^{-(N-1)jk\delta})$
 A noter que cette relation permet d'obtenir l'éclairement en remarquant que :

$$S_{tot}(M) = \frac{S e^{jk(O_1, M)} (1 + e^{-jk\delta})}{(1 + e^{-jk\delta})} = \frac{S e^{jk(O_1, M)} e^{-\frac{Njk\delta}{2}} \left(e^{\frac{Njk\delta}{2}} + e^{-\frac{Njk\delta}{2}} \right)}{e^{-\frac{jk\delta}{2}} (e^{\frac{jk\delta}{2}} + e^{-\frac{jk\delta}{2}})} = \frac{S e^{jk(O_1, M)} e^{-\frac{Njk\delta}{2}} \sin\left(\frac{N\phi}{2}\right)}{e^{-\frac{jk\delta}{2}} \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)}$$

$$E(M) = \epsilon_{max} \left(\frac{\sin\left(\frac{N\phi}{2}\right)}{N \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)} \right)^2$$

Commenté [A14]: Comme le prisme, mais avec une meilleure résolution ou pouvoir séparateur entre deux longueurs d'onde : typiquement $10^{-3} rad/nm$ pour le réseau et $10^{-4} rad/nm$ pour le prisme.

Commenté [A15]: C'est l'inverse pour un prisme

Commenté [AM16]: On pourra noter que la dispersion augmente avec l'ordre en différenciant la relation fondamentale des réseaux en incidences normale :
 $\cos\theta_m d\theta_m = \frac{m}{a} d\lambda = \sin\theta_m \frac{d\lambda}{\lambda}$
 $d\theta_m = \tan\theta_m \frac{d\lambda}{\lambda}$
 Quand m augmente θ_m augmente également et donc l'aptitude à séparer deux λ aussi