

Chapitre 7 : Oem dans le vide et réfléchies sur les conducteurs

Couplage des champs

A- Onde électromagnétique dans le vide

1) Equations de propagation

On rappelle les équations de Maxwell dans le vide :

$$\text{div } \vec{E} = 0, \text{div } \vec{B} = 0, \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

- Equation de propagation du champ électrique :

$$\text{On a } \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{donc : } \text{rot}(\text{rot } \vec{E}) = \text{grad}(\text{div } \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\frac{\partial \text{rot } \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{On posera } c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}}$$

Dans le vide, l'équation de propagation du champ électrique est donnée par : $\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$

- Equation de propagation du champ magnétique :

$$\text{On a } \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{Donc : } \text{rot}(\text{rot } \vec{B}) = \text{grad}(\text{div } \vec{B}) - \Delta \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \text{rot } \vec{E}}{\partial t}$$

Dans le vide, l'équation de propagation du champ magnétique est donnée par : $\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$

2) Solution particulière de l'équation de propagation des Oem dans le vide : l'OPPH

En repérage cartésien, l'opérateur laplacien permet un découplage des six composantes.

$$\begin{pmatrix} \Delta E_x \\ \Delta E_y \\ \Delta E_z \end{pmatrix} - \frac{1}{c^2} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \Delta B_x \\ \Delta B_y \\ \Delta B_z \end{pmatrix} - \frac{1}{c^2} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

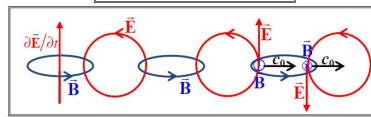
Les composantes des champs vérifient une équation linéaire de propagation de d'Alembert.

Chaque composante, notée a , a pour solution particulière une OPPH donnée par $a(M,t) = A \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \phi)$ se propageant à la vitesse c dans la direction \vec{u} (avec $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{u}$ vecteur d'onde perpendiculaire aux surfaces d'onde).

La solution générale de ces équations de propagation est une superposition d'OPPH, la somme portant à la fois sur la direction de propagation \vec{u} et sur la pulsation ω .

Ces équations traduisent un couplage direct entre champ électrique et champ magnétique. En effet, toute variation temporelle du champ électrique induit une variation spatiale du champ magnétique dont la variation temporelle induit une variation spatiale du champ électrique dont la variation temporelle..., etc.

$$\nabla(M,t), \begin{cases} \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \text{rot } \vec{B} \\ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\text{rot } \vec{E} \end{cases}$$



Rappel sur la résolution des équations de d'Alembert

Onde plane : onde pouvant être décrite qu'à l'aide d'une seule variable cartésienne et dont les surfaces d'onde sont des plans perpendiculaires à la direction de propagation \vec{u} . Ce type de solution est pertinente pour décrire localement une onde (où loin des sources)

Onde plane progressive : L'onde se propage sans déformation à la vitesse c et dans une direction \vec{u} .

Onde plane progressive harmonique : Il s'agit d'une onde plane progressive décrite par une fonction du type $\cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM})$ et correspond à la solution particulière de l'équation de d'Alembert à 1D

Commenté [A1]: Comment fonctionne les lunettes Ray ban P ? et les lunettes 3D ? Expérience : mise en évidence de la polarisation d'un laser et principe d'un polariseur avec une lumière blanche

Commenté [A2]: On rappelle que $\text{rot}(\text{rot } \vec{a}) = \text{grad}(\text{div } \vec{a}) - \Delta \vec{a}$

Commenté [A3]: Le repérage cartésien est nécessaire pour assurer le découplage de chaque composante (en effet le laplacien en cylindrique et sphérique agit sur les vecteurs unitaires et ne découplent pas les composantes).

Par exemple en cylindrique :

$$\Delta A = + \left(\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A}{\partial \theta} \frac{\partial A}{\partial r} \right) u_r + \left(\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A}{\partial \theta} \frac{\partial A}{\partial r} \right) u_\theta + \left(\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} \right) u_z$$

Pour obtenir ce résultat on utilise $\text{rot}(\text{rot } \vec{a}) = \text{grad}(\text{div } \vec{a}) - \Delta \vec{a}$
Ce qui est très long à traiter...

Commenté [A4]: Pour chaque composante, on a la même pulsation (et même vecteur d'onde) en revanche A et ϕ sont a priori différents

Commenté [A5]: Direction de propagation perpendiculaire aux surfaces d'onde est un résultat général pour tout type d'onde se propageant dans un milieu linéaire et isotrope (comme le vide, l'eau, le verre...)

Doc : spectre des OEM

3) Structures des OemPPH dans le vide

Considérons le cas d'une OemPPH se propageant dans le vide définie et décrite en repérage cartésien telle que :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(j\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM}) \text{ et } \vec{B} = \vec{B}_0 \exp(j\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM}).$$

- Transversalité du champ électrique

$$\text{div} \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -j\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \rightarrow \vec{E} \perp \vec{k}$$

Ainsi le champ électrique est, à tout instant, perpendiculaire à la direction de propagation.

- Transversalité du champ magnétique

$$\text{div} \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \rightarrow \vec{B} \perp \vec{k}$$

Ainsi le champ magnétique est, à tout instant, perpendiculaire à la direction de propagation.

Les ondes électromagnétiques planes progressives harmoniques dans le vide sont des ondes transversales.

- Couplage \vec{E} , \vec{B}

L'équation de Maxwell-Faraday sera très utile pour mettre en évidence le couplage des deux champs :

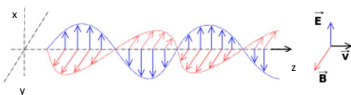
$$\text{rot} \vec{E} = -j\vec{k} \wedge \vec{E} = -j\omega \vec{B} \rightarrow \vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c}$$

Une OemPPH (\vec{u} , \vec{E} , \vec{B}) forment un trièdre orthogonal direct, les champs sont en phases et $\|\vec{B}\| = \|\vec{E}\|/c$

Si : $\vec{E} = E_0 \exp(j\omega t - kz) \vec{u}_x$

Alors : $\vec{B} = \frac{E_0}{c} \exp(j\omega t - kz) \vec{u}_y$

Soit : $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x$ et $\vec{B} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kz) \vec{u}_y$



4) OPPH polarisée rectilignement

La polarisation d'une OemPPH est fixée par la direction du vecteur champ électrique lorsqu'il est observée dans une surface d'onde donnée.

Observé dans un plan perpendiculaire à la direction de propagation une OemPPH polarisée rectilignement est telle que la direction de son champ électrique associé est constante.

Rq : Pour le moment, on a 3 composantes :

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}_0 \exp(j\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM}) \text{ Avec } \vec{E}_0 = \begin{pmatrix} E_{0x} \exp(j\phi_x) \\ E_{0y} \exp(j\phi_y) \\ E_{0z} \exp(j\phi_z) \end{pmatrix}$$

Hypothèses pour utiliser $\vec{\nabla} \equiv -j\vec{k}$

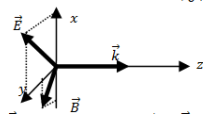
Il faut :

- Utiliser le repérage cartésien
- Traiter le cas d'une OPPH exprimée en notation complexe

Représentation d'une OemPPH

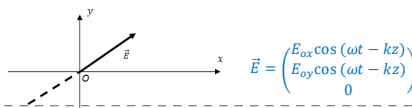
De manière générale, le champ électrique d'une OemPPH est contenu dans un plan perpendiculaire à la direction de propagation et possède deux composantes orthogonales à l'instant considéré.

Pour une OemPPH se propageant dans le vide dans la direction \vec{u}_z , on a donc $\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{B} = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} -E_y \\ E_x \\ 0 \end{pmatrix}$



OemPPH polarisée rectilignement

Si le champ électrique possède deux composantes, il est nécessaire que ces composantes soient en phases !



Commenté [A6]: Doc : Notation complexe des OPPH

Commenté [A7]: Maxwell-Ampère donne le même résultat $\text{rot} \vec{B} = -j\vec{k} \wedge \vec{B} = \frac{j\omega \vec{E}}{c^2} \rightarrow \frac{\omega \vec{E}}{c^2} = -\vec{k} \wedge \vec{B} \rightarrow \vec{E} = -c\vec{u} \wedge \vec{B}$
Cependant, nous aurons souvent d'abord accès au champ électrique pour ensuite déterminer le champ magnétique : MF est donc plus indiquée en pratique.
A noter que par décomposition en série de Fourier d'une OPP en OPPH, la structure des OPPH dans le vide se généralise à celle des OPP ainsi on a aussi $\vec{B} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c}$.
Il faudra bien se souvenir que cette écriture ne convient qu'aux OPPH voire OPP en repérage cartésien !!!!!
Ce résultat reste d'une portée très générale car, l'étude du rayonnement d'une antenne montre que l'onde émise est localement une OPP. Cette solution particulière est donc très pertinente.

Attention donc, cette écriture $\vec{B} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c}$ ne convient pas aux ondes stationnaires et aux ondes sphériques (amplitude non uniforme dans un plan perpendiculaire à la direction de propagation)

Commenté [A9]: L'OemPPH ne fixe par la nature de la polarisation qui est quelconque de manière générale

Commenté [A8]:
Une telle onde a été décrite au paragraphe précédent. Il s'agit d'une polarisation particulière qui permet de décrire la polarisation la plus générale d'une onde électromagnétique : la polarisation elliptique. En effet, une onde polarisée elliptiquement peut être vue comme formée de deux ondes polarisées rectilignement perpendiculaires l'une de l'autre.
<https://www.youtube.com/watch?v=Fu-aYnRkUgg>

On peut observer des phénomènes de polarisation « naturelle ». En effet, on montre qu'un électron excité par une OEM est accéléré et rayonne particulièrement suivant la direction perpendiculaire à son axe d'oscillation. On observe alors :
- Une polarisation par diffusion
- Une polarisation par réflexion (comme la majorité des surfaces naturelles sont planes, on observe alors des rayons polarisés horizontalement, des lunettes polarisées verticalement permettent de limiter les réflexions)

Rq : les polariseurs utilisent des conducteurs (fils ou longues molécules étirées suivant une direction absorbant alors la polarisation associée)
<http://www.youtube.com/watch?v=5L1mFYTntGk>

5) Aspects énergétiques :

Si $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x$ et $\vec{B} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kz) \vec{u}_y$

alors $\langle \vec{\pi} \rangle = \left\langle \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right\rangle = \left(\frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \right) \vec{u}_z$

L'énergie se propage donc bien dans le sens du vecteur d'onde. On a une densité d'énergie électromagnétique moyenne qui est donnée par :

$\langle u_{em} \rangle = \left\langle \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right\rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2}$

B) Réflexion sur un conducteur

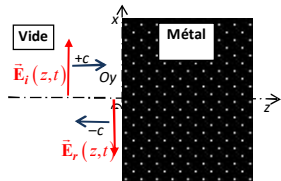
1) Champs dans un conducteur parfait

Un conducteur parfait est associé à une conductivité γ infinie. Sous l'action d'un champ électrique extérieur, un conducteur parfait présente alors une réponse inductive impliquant :

- Le champ électrique dans un conducteur parfait est nul : $\vec{E}_{int} = \vec{0}$
- L'absence de champ électrique impose l'absence de courant au sein du conducteur : $\vec{j}_{int} = \vec{0}$ (un courant surfacique est cependant possible)
- La nullité des deux champs précédents implique, d'après les équations de Maxwell, la nullité du champ magnétique au sein du conducteur

2) Réflexion en incidence normale

Soit un conducteur occupant le demi-espace $z > 0$ et une OemPPH incidente, polarisée rectilignement et telle que $\vec{E}_i = E_{0,i} e^{j(\omega t - kz)} \vec{u}_x$



La continuité de cette composante tangentielle

$\vec{E}_{vide}(0^-, t) = \vec{E}_{metal}(0^+, t) = \vec{0}$

La nullité du champ électrique en $z = 0$ impose l'existence d'un champ réfléchi que l'on écrira :

$\vec{E}_r = E_{0,r} e^{j(\omega t + kz)} \vec{u}_x$

Discussion du modèle de l'OemPPH

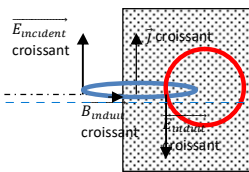
La propagation du champ électromagnétique entraîne donc celle de l'énergie électromagnétique. Le vecteur de Poynting $\vec{\pi}(M, t)$ est un champ de vecteur dont le flux à travers une surface $d\vec{S}$ va nous donner la puissance traversant cette surface.

Cette densité moyenne uniforme conduit, par intégration dans tout l'espace, à une énergie moyenne électromagnétique infinie : ce résultat rappelle le caractère non physique des OPPH prises isolément.

Effet du champ électrique sur le conducteur

L'arrivée d'une OemPPH incidente et polarisée rectilignement, notée $\vec{E}_i = E_{0,i} e^{j(\omega t - kz)} \vec{u}_x$, sur un conducteur plan occupant le demi-espace $z > 0$ impose un mouvement oscillant à la pulsation ω des charges en surface. Ce courant surfacique est à l'origine d'un champ électrique réfléchi de même pulsation, se propageant dans un sens opposé, avec un éventuel déphasage et alors tel que $\vec{E}_r = E_{0,r} e^{j(\omega t + kz)} \vec{u}_x$.

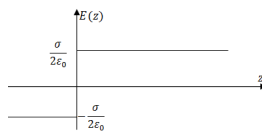
Interprétation qualitative du champ nul dans un conducteur parfait



Discontinuité du champ électrique

Dans le cas d'une distribution surfacique (σ) de charges statiques (dans un plan xoy), nous avons vu que :

$\Delta \vec{E} = \Delta \vec{E}_\perp = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z$



Donc on a une continuité de la composante parallèle au plan du conducteur : c'est ce que nous avons admis en écrivant que

$\vec{E}_i(0^-, t) + \vec{E}_r(0^-, t) = \vec{E}_t(0^+, t) = \vec{0}$

Commenté [A10]: Il est notable de dire que cette propriété n'est pas généralisable dans le cas de l'optique des milieux anisotropes...

Commenté [A15]: On va s'intéresser à la valeur moyenne car les fréquences des OEM sont souvent élevées par rapport aux fréquences de coupure des capteurs

Commenté [A11]: On retrouve l'équipartition des deux formes d'énergie. Ce résultat est aussi valable de manière instantanée pour des OPP

Commenté [A12]: Pour un conducteur réel, ce résultat est tout à fait correct car le champ n'existe que sur une très faible épaisseur d'une dizaine de nm (pour le visible), il faut cependant ne pas excéder des fréquences supérieures à 10^{14} Hz si l'on souhaite conserver le modèle d'une conductivité réelle

Commenté [A13]: En dehors du cas de l'incidence normale, on écrit donc la continuité de la composante parallèle au plan :

En un point M du dioptré, on a : $\vec{E}_i(M, t) + \vec{E}_r(M, t) = \vec{E}_t(M, t) = \vec{0}$
 $\vec{E}_{o,i} + \vec{E}_{o,r} \times e^{-j(\vec{k}_r - \vec{k}_i) \cdot \vec{OM}} = \vec{0}$
 Cette relation valable pour tout M implique

$(\vec{k}_r - \vec{k}_i) \cdot \vec{OM} = 0$
 Avec \vec{OM} sur le dioptré alors : $(\vec{k}_r - \vec{k}_i) = \alpha \vec{n}$
 Soit : $k_r \vec{t} = k_i \vec{t}$ ce qui implique l'égalité des angles incident et réfléchi

Commenté [AM14]: On s'appuyer ici sur l'exemple de l'onde sur une corde fixée à une extrémité pour écrire l'égalité $\vec{E}_i(0, t) + \vec{E}_r(0, t) = \vec{0}$
 La situation est en fait plus subtile, il convient d'utiliser les relations de passage et la nullité des champs dans le conducteur pour connaître l'expression des champs réfléchis
 D'ailleurs pour le champ magnétique, on a : $\vec{B}_i(0, t) + \vec{B}_r(0, t) = -\mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{u}_z$

Ainsi $E_{0,i} = -E_{0,r}$ et l'onde électrique \vec{E} totale dans l'espace $z < 0$ s'écrit alors comme une onde stationnaire :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= E_{0,i} e^{j(\omega t - kz)} \vec{u}_x - E_{0,i} e^{j(\omega t + kz)} \vec{u}_x \\ \vec{E} &= E_{0,i} e^{j(\omega t)} (e^{j(-kz)} - e^{j(kz)}) \vec{u}_x \\ \vec{E} &= -2j E_{0,i} e^{j(\omega t)} \sin(kz) \vec{u}_x \\ \vec{E} &= 2E_{0,i} \sin(kz) \sin(\omega t) \vec{u}_x \end{aligned}$$

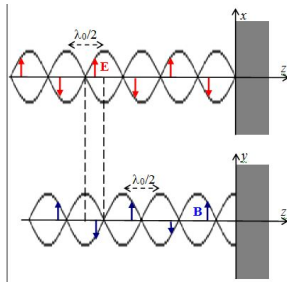
On obtient l'expression du champ magnétique à l'aide de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\text{rot} \vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \vec{E} \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \vec{E} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2E_{0,i} k \cos(kz) \sin(\omega t) \vec{u}_y = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Avec une constante d'intégration nulle en régime d'onde :

$$\vec{B} = \frac{2E_{0,i}}{c} \cos(kz) \cos(\omega t) \vec{u}_y$$

Nous constatons que le champ magnétique est en quadrature spatio-temporelle avec le champ électrique



Commenté [A16]: Ce qui n'est pas inquiétant car il ne s'agit plus d'une OemPPH mais d'une onde plane stationnaire ! On peut cependant la décrire comme la somme de deux ondes PPH possédant chacune la structure des OemPPH dans le vide

Avec la relation de passage $\Delta \vec{B}(0) = \Delta \vec{B}_y(0) = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{u}_z$ alors :

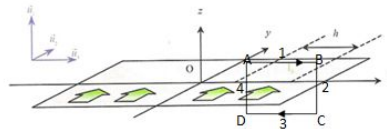
$$\mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{u}_z = -\frac{2E_{0,i}}{c} \cos(\omega t) \vec{u}_y$$

Et : $\vec{j}_s = 2\epsilon_0 c E_{0,i} \cos(\omega t) \vec{u}_x$

Ce courant est à associer directement au champ électrique incident à l'origine du mouvement des électrons en surface.

Discontinuité du champ magnétique

Dans le cas d'un courant établi sur une faible épaisseur ϵ alors on définit un vecteur densité de courant surfacique ($I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_l \vec{j}_\epsilon \cdot d\vec{OM} = \int_l \vec{j}_s \cdot d\vec{OM}$).



L'application du théorème d'Ampère prévoit également une discontinuité du champ magnétique :

$$\Delta \vec{B} = \Delta \vec{B}_y = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{u}_z$$