Chapitre 3 : Théorème de Gauss et condensateur

I- Théorème de Gauss :

a) Enoncé du théorème de Gauss

Soit une surface S fermée pour laquelle la normale en tout point est, par convention, orientée vers l'extérieur. Le flux ϕ du champ électrostatique à travers la surface fermée S (appelée surface de Gauss) est proportionnel à la charge totale Q_{int} enfermée dans cette surface : $\phi = \oiint_S \vec{E}(M)\, d\vec{S}(M) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

Avec M point appartenant à la surface S de Gauss et centré sur $dS(M)$

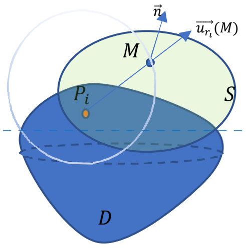
En associant à la distribution de charges une densité volumique de charges $\rho(M)$, on peut écrire (avec S surface de Gauss et V volume délimité par cette surface) :

$$\oiint_S \vec{E} d\vec{S} = \iiint_V div\vec{E} dV = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \iiint_V \frac{\rho(M)}{\varepsilon_0} dV$$

D'où : $div\vec{E} = \frac{\rho(M)}{\varepsilon_0}$ Ce bilan local de flux constitue l'équation de Maxwell Gauss

Démonstration du théorème de Gauss :

Soit D une distribution quelconque de N charges ponctuelles et q_{P_i} une charge de D située au point P_i.



Mesurons le flux du champ électrique créé par D à travers une surface S fermée et quelconque.

$$\phi = \oiint \sum_{i=1}^{N} \frac{q_{Pi}}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2} \overrightarrow{u_{ri}}.dS\vec{n} = \sum_{i=1}^{N} \oiint \frac{q_{Pi}}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2} \overrightarrow{u_{ri}}\, dS\vec{n}$$

La quantité $dS\vec{n}.\overrightarrow{u_{ri}}$ correspond à la projection de $d\vec{S}$ suivant $\overrightarrow{u_{ri}}$ et donc à $r_i^2 sin\theta_i d\theta_i d\varphi_i$:

- Pour des charges dans S alors pour décrire toute la surface $S : \phi = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_{Pi}}{4\pi}$
- Pour des charges extérieures $\oiint \frac{q_{Pi}}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2} \overrightarrow{u_{ri}}\, dS\vec{n} = 0$ à cause du flux rentrant et sortant intégrés sous le même angle solide mais au signe près.

b) Symétrie et invariance du champ électrostatique

Le principe de Curie postule que le champ électrostatique possède les mêmes propriétés d'invariance et de symétrie que la distribution de charges qui en est à l'origine. Il convient donc de ne pas confondre invariance et symétrie :

- L'analyse des symétries de la distribution de charges peut nous permettre de déterminer la ou les directions du champ électrostatique.
- Repérer les invariances de la distribution de charges c'est repérer la ou les variables dont ne dépend pas la fonction densité (volumique, surfacique ou linéique) de charges et revient à connaître les variables dont ne dépend pas le champ électrostatique.

II- Conducteur, condensateur et capacité

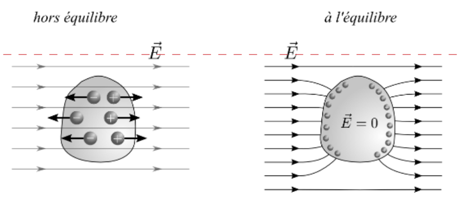
a) Conducteur et conducteur en équilibre

Un conducteur est un corps contenant des charges libres q de se déplacer sous l'action d'une force électrique (aussi petite soit-elle).

Dans un conducteur à l'équilibre, les charges sont immobiles, on a alors :

- une force électrique $q\overrightarrow{E_{cond}} = \vec{0} \rightarrow$ le champ électrique $\overrightarrow{E_{cond}}$ dans un conducteur à l'équilibre est nul.
- $\overrightarrow{E_{cond}} = -\overrightarrow{grad}V_{cond} = \vec{0}$, le conducteur à l'équilibre est un volume équipotentiel.
- d'après MG alors $div\overrightarrow{E_{cond}} = 0$ ce qui impose $\rho_{cond} = 0$. Ainsi une situation d'équilibre observée dans un conducteur est celle minimisant l'énergie potentielle entre les charges et conduit à une distribution surfacique.

Conducteur en équilibre :



On pourra remarquer qu'à l'équilibre, les lignes de champ électrostatique sont perpendiculaires au conducteur car sa surface est une équipotentielle. Soit $\sigma(M)$ la densité surfacique en un point M de la surface du conducteur alors, en appliquant le théorème de Gauss localement, on a $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$

Commenté [A1]: Problématique : Comment expliquer l'effet Faraday et l'effet de pointe

Vidéos du palais de la découverte
http://phymain.unisciel.fr/faire-taire-une-radio/

Nous allons présenter au cours de ce chapitre une troisième méthode permettant de calculer le champ électrostatique : le théorème de Gauss. Cette méthode sera, on le verra, un moyen rapide d'obtenir l'expression du champ dans les cas de distributions présentant de hautes symétries.

Commenté [A2]: On peut se convaincre à l'aide de cette vidéo
http://uel.unisciel.fr/physique/elecstat/elecstat_ch04/co/observer_ch04_01.html

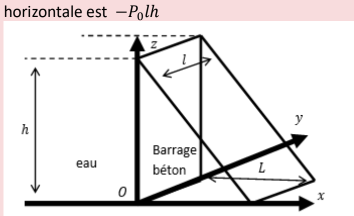
Et de cette vidéo
http://uel.unisciel.fr/physique/elecstat/elecstat_ch08/co/observer_ch08_02.html

Commenté [A3]: En utilisant le théorème d'Ostrogradsky

Commenté [A4]: On retrouve que le champ électrostatique est à flux conservatif dans une zone sans charge : des lignes de champ parallèles sont donc associées à un champ uniforme. Attention $div\vec{E} = 0$ mais le champ n'est pas nul pour autant !!!

Commenté [AM5]: $\iiint_V \left(div\vec{E} - \frac{\rho(M)}{\varepsilon_0}\right) dV = 0$
Comme cette intégrale doit être nulle pour tout volume alors : $div\vec{E} = \frac{\rho(M)}{\varepsilon_0}$

Commenté [AM10]: Nous avons déjà rencontré cette situation statique des fluides :
Exemple 1 : La calcul de la force pressante atmosphérique horizontale est $-P_0 lh$



... [2]

Commenté [AM6]: Dans un métal, il s'agira d'électrons. Et suite à l'application d'un champ électrique, un matériau comme le cuivre met moins de $10^{-14}s$ avant d'atteindre la situation d'équilibre

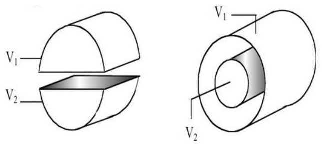
Commenté [AM7]: Plus rigoureusement, c'est une distribution quasi-surfacique

Commenté [AM8]: On peut retrouver ce résultat en appliquant le théorème de Gauss à travers une surface de gauss comprise dans le conducteur : $\phi = 0$ donc $Q_{int} = 0$. Attention cependant, le champ à proximité immédiate de la surface extérieure du conducteur n'est pas nul. Cette ... [1]

Commenté [AM9]: Il s'agit même de la surface extérieure si le corps est évidé

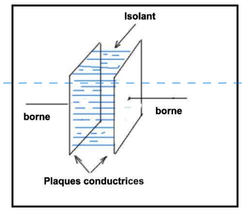
b) Définition d'un condensateur

Un condensateur est constitué de deux conducteurs (conducteur A_1 au potentiel V_1 et conducteur A_2 au potentiel $V_2 < V_1$) chargés (en surface), séparés par un isolant et dont l'influence électrique conduit à des charges de signe opposée $+Q$ et $-Q$. La charge $Q > 0$ accumulée sous la tension $U = V_1 - V_2 > 0$ entre les conducteurs vérifie $Q = CU$ où $C > 0$ est la capacité du condensateur $[C] = [F]$.

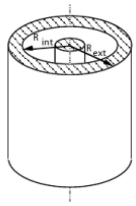


Exemples de condensateur

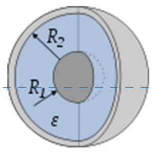
Condensateur plan



Condensateur cylindrique



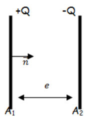
Condensateur sphérique



III- Modèle du condensateur plan

a) Description

Il s'agit de deux surfaces S conductrices planes parallèles (A_1 et A_2) dont les dimensions sont grandes par rapport à la distance e qui les sépare (on néglige les effets de bord). Nous allons considérer chacune des armatures comme des plans infinis et chargés respectivement avec une charge +Q et -Q



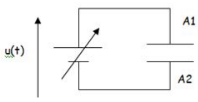
b) Capacité du condensateur plan :

Le champ créé par le plan A_1 (de surface S) uniformément chargé avec une densité surfacique de charges $\sigma = \frac{Q}{S}$ est donné par : $\overrightarrow{E_{A_1}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n}$. Donc le champ total entre les armatures est donné par : $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}\vec{n}$. On obtient la relation entre la charge et la différence de potentiel en intégrant $\vec{E}.\overrightarrow{dOM} = -dV$: $\int_0^e \vec{E}.\overrightarrow{dOM} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}e = -\int_{V_1}^{V_2} dV = U$

On trouve alors la capacité du condensateur plan : $C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$. Dans le cas où le vide est remplacé par un isolant, alors : $C = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{e} = \frac{\varepsilon S}{e}$ avec $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$ et ε_r est une constante relative au milieu isolant.

c) Energie électrique d'un condensateur

On considère le circuit suivant :

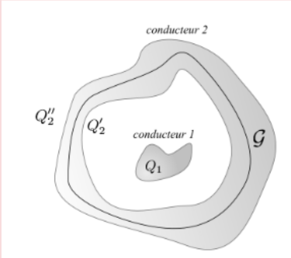


A $t = 0$ le condensateur est déchargé (pas de charge sur les armatures)

A t, le potentiel de A_1 est $v_1(t)$ et le potentiel de A_2 est $v_2(t)$: $q(t) = C(v_1(t) - v_2(t)) = Cu(t)$

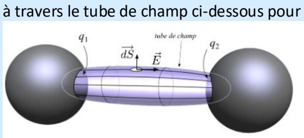
A t_{fin} la tension $u(t) = U = cte$ et le condensateur se charge avec une charge Q vérifiant $Q = CU$

Commenté [AM11]: Deux conducteurs placés au voisinage l'un de l'autre vont s'influencer mutuellement. Dans le cas où toutes les lignes de champ de l'un se termine sur l'autre conducteur, on parle de conducteurs en influence total.



La linéarité des équations de l'électromagnétisme laisse penser que :
$Q_1 = aV_1 + bV_2$
Or si $V_1 = V_2$ alors aucune ligne de champ relie les deux conducteurs et donc, avec le théorème de Coulomb, $Q_1 = 0$
Donc $a = -b$
Soit $Q_1 = C(V_1 - V_2)$
Relions l'extérieur du conducteur 2 à la terre : $Q_2'' = 0$ et $V_2 = 0$.
Avec le théorème des éléments correspondants : $Q_1 = -Q_2'$

Commenté [A12]: Il suffit d'utiliser le théorème de Gauss à travers le tube de champ ci-dessous pour s'en convaincre :



Commenté [A13]: La méthode pour les autres types de condensateur reste la même :
Obtenir E(Q)
Puis V(Q) à l'aide de la relation qui relie champ et potentiel

Commenté [A14]: Cette relation est directe dans le cas d'un condensateur plan sachant que le champ est uniforme :U =Ee

Commenté [A15]: Il s'agit d'un isolant linéaire homogène et isotrope

L'arrivée d'une charge $-dq$ sur A_2 entraîne une charge $+dq$ sur A_1. Donc, chacune de ces charges a une énergie électrique donnée respectivement par : $-dqv_2$ et dqv_1. On peut exprimer l'énergie électrique totale associée à ces charges élémentaires : $dU_e = dq(v_1 - v_2) = udq = \frac{qdq}{C}$

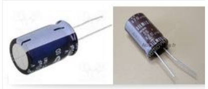
Donc si la charge finale est Q alors l'énergie électrique acquise par le condensateur est : $U_e = \frac{1}{C}\int_0^Q qdq = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2}$

Sachant que $U = eE$ et connaissant l'expression de la capacité C : $U_e = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}Se$. On peut alors définir une densité volumique d'énergie du condensateur : $u_e = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$

Une distribution de charges rayonnant, dans le vide, un champ électrique $\vec{E}$ est associée à une densité volumique d'énergie électrique $u_e = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$

Remarques sur les condensateurs :


Condensateur Céramique


Condensateur Polarisé

Dans le cas d'un condensateur électrochimique sous 10V et de capacité 100μF alors l'énergie électrique emmagasinée est de l'ordre de 5mJ. En tenant compte de la géométrie d'un condensateur, on trouve une densité de l'ordre de quelques Joules par mètre cube !

Commenté [A16]: On peut comparer cette énergie à celle nécessaire pour soulever de 1 m une charge de 1kg, soit 10 J : il est difficile de stocker de grandes quantités d'énergies

Page 1 : [1] Commenté [AM8]	Alexis Meret	23/10/2019 09:47:00

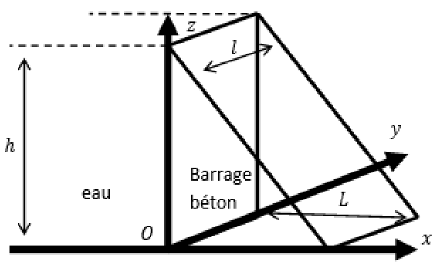
On peut retrouver ce résultat en appliquant le théorème de Gauss à travers une surface de gauss comprise dans le conducteur : $\phi = 0$ donc $Q_{int} = 0$.

Attention cependant, le champ à proximité immédiate de la surface extérieure du conducteur n'est pas nul. Cette discontinuité rend compte de la distribution surfacique du conducteur

Page 1 : [2] Commenté [AM10]	Alexis Meret	30/10/2017 14:34:00

Nous avons déjà rencontré cette situation statique des fluides :

Exemple 1 : La calcul de la force pressante atmosphérique horizontale est $-P_0 lh$



Pour une hémisphère de Magdebourg, la force pressante est $P_0 \pi R^2$