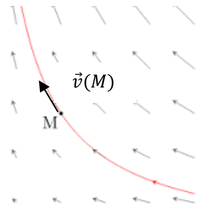
Chapitre 6 : Fluides en écoulements stationnaires

I- Vocabulaire(document1)

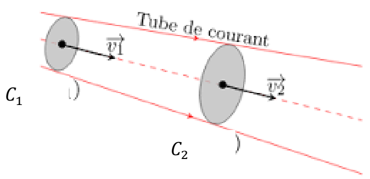
Nous allons étudier des écoulements stationnaires pour lesquels il est donc possible de caractériser chaque élément mésoscopique centré en M par un champ des vitesses $\vec{v}(M)$, des masses volumique $\rho(M)$, des pressions $P(M)$….

Pour des écoulements calmes qualifiés de laminaires, il est possible d'établir une cartographie du champ des vitesses et donc de tracer les lignes de champ c'est-à-dire les courbes tangentes en tout point à $\vec{v}(M)$.

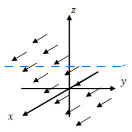
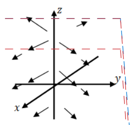
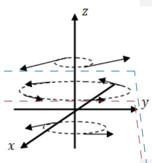
Ligne de champ



Enfin, un tube de courant est constitué par l'ensemble des lignes de champ s'appuyant sur deux contours C_1 et C_2.



Exemples de description Eulérienne (document 1)

Exemple	Représentation
Ecoulement uniforme Le champ des vitesses est le même en tout point $\vec{v}(M) = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{u_x} \\ \vec{u_y} \\ \vec{u_z} \end{matrix}$	
Ecoulement radial à symétrie cylindrique En cylindrique, un tel écoulement vérifie : $\vec{v}(M) = v_r(r)\vec{u_r}$ Il est invariant par rotation autour de l'axe Oz et par translation suivant l'axe Oz $\vec{v}(M) = \begin{pmatrix} \frac{K}{r} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{u_r} \\ \vec{u_\theta} \\ \vec{u_z} \end{matrix}$ Si $K > 0$ on parle de source, si $K < 0$ de puit	
Ecoulement orthoradial à symétrie cylindrique En cylindrique, un tel écoulement vérifie : $\vec{v}(M) = v_\theta(r)\vec{u_\theta}$ Il est invariant par rotation autour de l'axe Oz et par translation suivant l'axe Oz $\vec{v}(M) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{K}{r} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{u_r} \\ \vec{u_\theta} \\ \vec{u_\varphi} \end{matrix}$ Ce type d'écoulement est qualifié de vortex	

II- Les débits (document 2 et 3)

a) Débit volumique

D_v ($[D_v] = [m^3.s^{-1}]$) mesure le volume de fluide traversant une surface S par unité de temps.

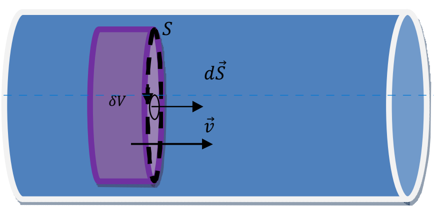
1[e] définition : Si δV est le volume traversant la surface ouverte et orientée S pendant dt alors :

$$D_v = \frac{\delta V}{dt}$$

2[e] définition : Le débit volumique à travers une surface S représente le flux du champ des vitesses $\vec{v}(M)$ à travers S : $D_v = \iint_S \vec{v}(M).d\vec{S}(M)$

Débit volumique et massique

Soit un écoulement dans une canalisation et une section droite S orientée :

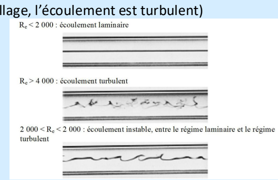


Supposons que l'écoulement soit uniforme et axial alors $\delta V = \|\vec{v}\|dtS$. Le débit est alors donné par

$$D_v = \|\vec{v}\|S$$

Commenté [A1]: Comment peut-on expliquer la dimintion de la section du filet d'eau s'achapant d'un robinet ?
Vidéos : Suivi d'un écoulement à l'aide de particules traceuses
Ecoulement laminaire et turbulent dans une conduite cylindrique
Visualisation d'une couche limite

Commenté [A2]: Le minimum à savoir sur le nombre de Reynolds (Hors programme)
Notion de force de viscosité d'un fluide
Les forces de viscosité d'un fluide tendent à ralentir les particules de fluide rapides et accélérer les plus lentes : c'est donc au niveau des gradients de vitesse importants que leurs travaux va se faire le plus ressentir (avec un échauffement et donc une source d'irréversibilité)
Nombre de Reynolds
L'idée est de comparer deux termes :
$\frac{energie\ cinétique\ volumique\ (inertie)}{travail\ volumique\ de\ la\ force\ de\ viscosité} = \frac{\rho v R}{\eta}$
ρ est la masse volumique du fluide, R le rayon de la canalisation, v la vitesse de l'écoulement et η sa viscosité (Pa.s)
Reynolds a pu constater expérimentalement un comportement commun à de nombreux fluides s'écoulant dans une canalisation :
- un écoulement présentant des lignes de champ calmes et régulières pour un nombre de Reynolds Re>2000 (écoulement laminaire)
- un écoulement présentant des lignes de champ présentant des fluctuations spatiales et temporelles importante (zone appelée sillage, l'écoulement est turbulent)



Au bilan : avec l'hypothèse stationnaire, nous supposons les écoulements étudiés laminaires (réciproque fausse !)
Notion de couche limite
Pour un écoulement laminaire, la présence des parois immobiles de la conduite est ressentie jusqu'au centre de la canalisation.
Pour un écoulement turbulent, l'écoulement est suffisamment rapide pour que l'effet de la paroi se limite au voisinage de la paroi sur une distance typique de $\frac{R}{\sqrt{Re}}$. Dans cette couche la vitesse varie brutalement et les effets visqueux y sont importants (dissipations énergétiques locales qui influencent quand même tout le fluide)
Par exemple, de l'eau en rotation dans un verre, va finir par s'immobiliser. La couche limite est typiquement de l'ordre du mm.
C'est dans cette zone que s'effectue principalement les effets visqueux qui finissent par dissiper l'énergie cinétique de l'ensemble.

Commenté [A3]: Exactement comme en magnétostatique.
Le régime stationnaire implique même une identification entre ligne de courant et trajectoire particulaire

Commenté [AM4]: On parle aussi de ligne de courant

Commenté [AM5]: Le caractère stationnaire des écoulements traités permet de confondre la trajectoire des particules avec une ligne de champ (ou ligne de courant).

Commenté [A6]: Par définition, il ne peut pas être traversé par une ligne de courant.

Commenté [AM7]: Dans le cas d'un écoulement dans une conduite, la géométrie de la conduite fixe la géométrie d'un tube de champ

Commenté [A8]: Avec cette définition, δV une grandeur algébrique : compté positivement ou négativement en fonction de l'orientation de S

b) Débit massique D_m et vecteur densité de flux de masse $\vec{j}$

D_m $([D_m] = [kg.s^{-1}])$ mesure la masse de fluide traversant une surface S par unité de temps.

1e définition : Si δm est la masse travsersant la surface ouverte et orientée S pendant dt alors : $D_m = \frac{\delta m}{dt}$

2e définition : le débit massique à travers une surface S représente le flux du vecteur $\rho(M)\vec{v}(M)$ à travers S. On définit donc le vecteur densité de flux de masse de l'écoulement $\vec{j}(M) = \rho(M)\vec{v}(M)$, j en $kg.m^{-2}.s^{-1}$ainsi : $D_m = \iint_S \vec{j}(M).d\vec{S}\,(M)$.

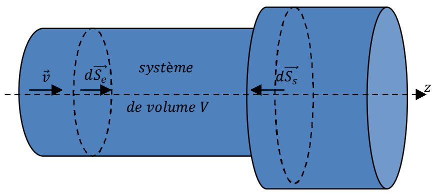
Dans le cas d'un fluide incompressible, de masse volumique ρ_0, on a $D_m = \rho D_m$

III) Bilan de masse et applications

Nous postulons que la masse ne peut être créée ou détruite : elle est conservée. Si la masse d'un système ouvert varie c'est qu'il y a un défaut entre le débit massique rentrant et sortant.

a) Mise en équation du bilan

Soit m la masse contenue dans d'un système ouvert de volume V. Pendant dt, une masse δm_e rentre dans V et une masse δm_s sort de V. Les conventions d'orientation impliquent $\delta m_e > 0$ et $\delta m_s < 0$ pour les débits massiques respectivement sortant et rentrant.



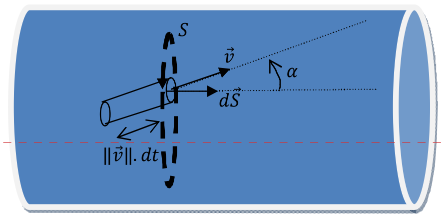
$$m(t+dt) - m(t) = (\delta m_e + \delta m_s)$$

$$dm = (\delta m_e - |\delta m_s|)$$

$$dm = (D_{me} - |D_{ms}|)dt$$

$$\frac{dm}{dt} = (D_{me} - |D_{ms}|)$$

Si l'on considère un écoulement non uniforme et non axial alors il faut prendre quelques précautions pour évaluer δV et raisonner localement :



Donc $\delta^2 V = \|\vec{v}\| cos\alpha dS dt$ et le volume qui va traverser dS pendant dt est $\delta V = \iint_S \|\vec{v}\| cos\alpha dS\, dt$

Donc $D_v = \iint_S \|\vec{v}\| cos\alpha dS = \iint_S \vec{v}.d\vec{S}$

Soit une relation plus générale :

$$D_v = \iint_S \vec{v}(M).d\vec{S}(M)$$

Dans le cas d'un écoulement quelconque, la quantité $\delta m = \iint_S \rho(M)\vec{v}(M).d\vec{S}(M)dt$ représente la masse élémentaire δm traversant la surface S centrée autour de M pendant l'intervalle de temps dt.

Conventions mathématiques et physiques

Le bilan de masse ci-contre s'écrit alors :

$$\frac{dm}{dt} = \oiint \vec{j}.d\overrightarrow{S_{int}}$$

Où $d\overrightarrow{S_{int}}$ est orienté vers l'intérieur du volume de contrôle. Avec $d\overrightarrow{S_{int}} = -d\overrightarrow{S_{ext}}$

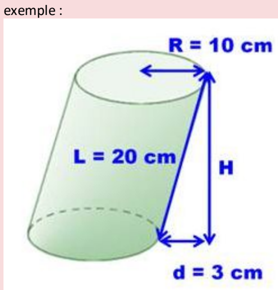
$$\frac{dm}{dt} = -\oiint \vec{j}.d\overrightarrow{S_{ext}}$$

En utilisant l'opérateur divergent :

$$\frac{dm}{dt} = -\iiint_V div\vec{j}.dV$$

Commenté [AM9]: Ici encore, δm est algébrique.

Commenté [AM14]: Il s'agit du volume d'un cylindre incliné. Par exemple :



$V = \pi R^2 H = \pi R^2 L cos\alpha$

Commenté [AM10]: Il existe donc des débimètres qui affichent le débit volumique ou le débit massique (le passage entre les deux est facile si l'on connaît la masse volumique)

Commenté [A11]: La physique postule la conservation de certaines grandeurs. Ces postulats ne sont pas si indépendants que cela. En effet Emmi Noether a en effet montré qu'à toutes propriétés d'invariance (du Laplacien) est associée une loi de conservation.
-La conservation de l'énergie mécanique d'un système conservatif résulte de l'invariance des lois physique dans le temps
-La conservation de la charge résulte de la symétrie matière – antimatière
- La conservation de la quantité de mouvement d'un système isolé résulte de l'invariance des lois physiques dans l'espace.
En revanche, la conservation de la masse n'est pas (ou plus) un postulat fort de la physique, car la masse n'est plus la propriété intrinsèque d'un corps (mais celle de son interaction avec l'extérieur) et que l'équivalence masse énergie autorise des pertes de masse (lors de réaction de fission nucléaire pas exemple)!

Commenté [AM12]: Tout nos bilans seront effectués en orientant les éléments vectorielles de surface vers l'intérieur du volume considéré (afin de compté positivement ce qui rentre)

Commenté [AM13]: Ce résultat est simple à interpréter : la masse d'un volume donné varie temporellement si le débit massique rentrant ne compense pas le débit massique sortant !

b) Ecoulement stationnaire

Dans le cas d'un écoulement stationnaire $\frac{dm}{dt} = 0$ et $D_{me} = |D_{ms}|$ pour toute section de la canalisation : on a conservation du débit massique → $D_m = Cte$

Si on suppose l'écoulement est axial $\vec{v}(M) = v_z(M)\overrightarrow{u_z}$ et uniforme sur toute la section $\vec{v}(M) = v_z(z)\overrightarrow{u_z}$ alors :

$$D_m = \rho(z)v_z(z)S(z) = Cte$$

c) Ecoulement stationnaire d'un fluide incompressible

Un fluide incompressible est associé à une masse volumique $\rho(M) = \rho_0 = Cte$. En écoulement stationnaire, on a :

$$D_{me} = |D_{ms}|$$

$$\rho_0 D_{ve} = \rho_0 D_{vs}$$

$$D_{ve} = D_{vs}$$

On a conservation du débit volumique : $D_v = Cte$ pour toute section de la canalisation.

Rq : Le résultat précédent s'étend aussi aux gaz qui peuvent être considérés comme peu comprimés pour des écoulements stationnaires de vitesse inférieure à 300m/s

Si on suppose l'écoulement est axial $\vec{v}(M) = v_z(M)\overrightarrow{u_z}$ et uniforme sur toute la section $\vec{v}(M) = v_z(z)\overrightarrow{u_z}$ alors :

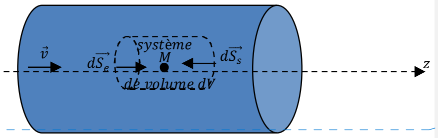
$$D_v = v_z(z)S(z) = Cte$$

Un resserrement de la canalisation (et donc des lignes de champ) s'accompagne d'une augmentation de la vitesse.

Analyse locale

Considérons un volume élémentaire mésoscopique dV contenant une masse $dm = \rho(M,t)$ centrée sur le point M.

L'écoulement est supposé axial : $\vec{j} = j_z(x,y,z,t)\overrightarrow{u_z}$



$$dm(M,t+dt) - dm(M,t) = j_z(x,y,z,t)dS_e dt - j_z(x,y,z+dz,t)dS_s dt$$

$$\frac{\partial dm}{\partial t}dt = -\frac{\partial j_z}{\partial z}dVdt$$

Donc :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial j_z}{\partial z}$$

Dans le cas d'un écoulement quelconque :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial j_z}{\partial z} - \frac{\partial j_y}{\partial y} - \frac{\partial j_x}{\partial x}$$

On retrouve l'expression de l'opérateur divergent :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -div\vec{j}$$

Dans le cas d'un écoulement stationnaire ($\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$) d'un fluide incompressible ($div\vec{j} = \rho_0 div\vec{v}$) :

$$div\vec{v} = 0$$

On dit alors que $\vec{v}$ est à flux conservative car :

$$\iiint_V div\vec{j}.dV = 0 \leftrightarrow \oint\!\!\!\oint \vec{j}.d\overrightarrow{S_{ext}} = 0 \leftrightarrow |D_{v,e}| = D_{vs}$$

Commenté [AM19]: Cette analyse locale sera faite en TD

Commenté [AM15]: L'hypothèse de l'écoulement axial n'est pas indispensable ici

Commenté [A16]: Si on suppose le fluide incompressible alors, pour un volume de contrôle donné, tout volume de fluide rentrant implique un même volume à sortir dans le même intervalle de temps.
Il est donc évident qu'il y ait conservation du débit volumique en écoulement stationnaire.

Commenté [AM17]: Ce résultat est évident et pose alors la question de l'intérêt de l'équation de conservation de la masse (et des difficultés qui l'accompagnent).
Cependant savoir qu'un écoulement dans une conduite cylindrique est stationnaire, axial $\overrightarrow{u_z}$ et que le fluide est incompressible amène directement, avec $div\vec{v}$ =0, au résultat $\vec{v} = v(r,\theta)\overrightarrow{u_z}$.
Si on accepte une symétrie de révolution alors $\vec{v} = v(r)\overrightarrow{u_z}$
Ce formalisme local peut donc se montrer très efficace et surtout transversal à d'autres bilans !

Commenté [AM20]: Dans cet exemple, nous avons même démontré l'expression de l'opérateur divergent en cartésien. Notre bilan de débit massique, est un bilan élémentaire de flux :
$\sum \vec{j}.d\overrightarrow{S_{int}} = -\sum \vec{j}.d\overrightarrow{S_{etx}} = -div\vec{j}dV$

Commenté [A18]: On parle alors d'écoulement incompressible