Chapitre 6 : Eléments de physique des ondes

I- Description d'une onde en espace illimité non déformant

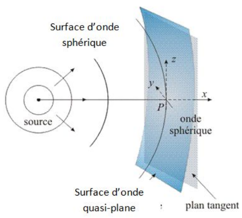
a) Définition d'une onde

Un phénomène ondulatoire traduit la propagation, sans transport de matière, d'une grandeur physique (ici a) : observable à un instant t_1, au point M_1, l'onde est en M_2 à $t_2 > t_1$: $a(M,t)$.

b) Définition d'une surface d'onde

c) Définition d'une onde sphérique

Une onde sphérique est une onde dont les surfaces d'onde sont des sphères. Ce type d'onde s'observe typiquement dans le cas d'une propagation isotrope (invariance pour toute direction) à partir de la source S, ainsi $a(M,t) = a(r,t)$.



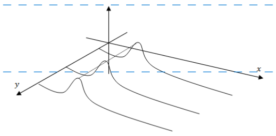
d) Définition d'une onde plane :

e) Onde progressive

La propagation d'une onde plane progressive décrite par le champ $a(x,t)$ et progressant à la vitesse c dans le sens Ox^+ est décrite par $a(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$ où f est une fonction définissant la forme de l'onde émise. Pour $a(x,t) = g\left(t + \frac{x}{c}\right)$ on a affaire à une onde progressive se propageant à la célérité c dans le sens Ox^-.

Notion d'onde plane

On peut créer une onde localement plane en imposant une vibration sur un tapis par exemple :

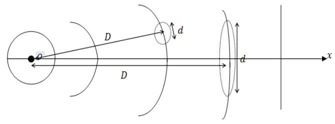


Autre exemple d'ondes planes : les ondes acoustiques se propageant dans un tuyau sonore :

La grandeur qui se propage ici est la surpression acoustique (de l'ordre de 1/100 de Pa)

De l'onde sphérique à l'onde plane

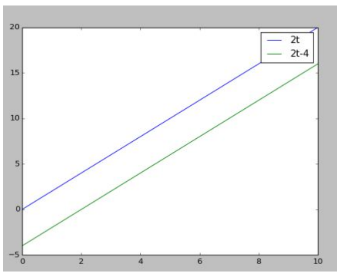
Cas d'une source ponctuelle émettant de manière isotrope (invariance θ et φ en repérage sphérique) : Lorsque le rapport $\frac{d}{D}$ de l'extension d de la zone d'observation et de la distance moyenne D à la source tend vers zéro, les surfaces d'onde, ont l'allure de plans : on retrouve localement des ondes planes.



L'onde plane apparaît donc comme le motif permet de décrire localement n'importe quel type d'onde.

La fonction retard :

Mathématiquement, $f(t)$ et $f(t-\tau)$ qui traduisent les mêmes variations mais avec un retard de τ. Par exemple :



Commenté [A1]: **Problématique : Pourquoi pouvons-nous distinguer la même note jouée par un piano, une guitare, un violon alors qu'il s'agit d'instruments à corde ?**
Expérience :
http://www.youtube.com/watch?v=taR0_XRkL0g

Commenté [A2]: Les termes plus précis seraient non absorbant et non dispersif

Commenté [A3]: Vidéo
http://www.ostralo.net/3_animations/swf/onde_corde.swf

Commenté [A4]: Perturbation sur une corde, déplacement des spires d'un ressort, compression de tranches d'air, champ électromagnétique dans un câble coaxial ou dans l'air…on peut donc remarquer l'existence d'one transversale et d'onde longitudinale

Commenté [A5]: Il s'agit évidemment d'un modèle qu'il conviendra de critiquer

Commenté [A6]: A noter que nous ne traiterons pas les ondes sphériques (qui ne sont pas unidirectionnelles). On montre que pour un milieu isotrope, l'onde progressive est du type $\frac{1}{r}f(t-\frac{r}{c})$. Cette dépendance en 1/r s'explique énergétiquement afin de garantir une conservation de l'énergie émise.

f) Onde plane progressive harmonique

Exemple : $a(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) = A\cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \phi\right)$

$a(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \phi)$ avec $k = \frac{\omega}{c} > 0$

Cette solution fait apparaître une double périodicité :

- Une périodicité temporelle, notée $[T] = [s]$, reliée à la pulsation temporelle $\omega = \frac{2\pi}{T}$

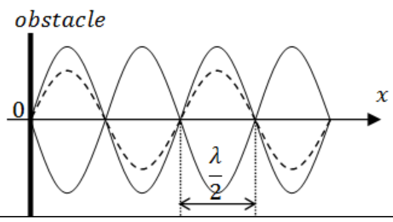
- Une périodicité spatiale, notée λ, $[\lambda] = [m]$, appelée longueur d'onde et reliée à la pulsation spatiale k, appelée nombre d'onde $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

Le nombre d'onde k et la pulsation temporelle ω sont reliés par : $k = \frac{\omega}{c}$, cette relation implique également que $\lambda = cT$.

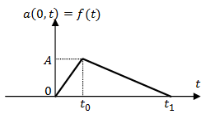
II- Description d'une onde plane progressive harmonique en espace « clos »

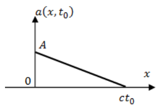
a) Onde plane stationnaire en espace semi-clos

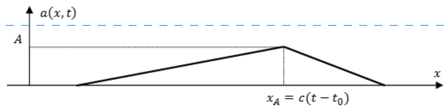
Considérons une onde plane, progressive, harmonique, incidente telle que $a_i(x,t) = A_i\cos(\omega t + kx)$ et supposons que la présence d'un obstacle en $x = 0$ soit à l'origine d'une onde réfléchie $a_r(x,t) = A_r\cos(\omega t - kx + \phi)$ et impose $\forall t$ une vibration totale nulle en $x = 0$.



Il est donc logique qu'avec le temps de propagation, l'état de vibration de chaque point soit celui qui était au niveau de la source avec un décalage temporel décrit par la fonction $f(t - \tau)$. Considérons l'émission d'une impulsion en $x = 0$ dont le profil est défini par la fonction $f(t)$. Ainsi $a(0,t) = f(t)$

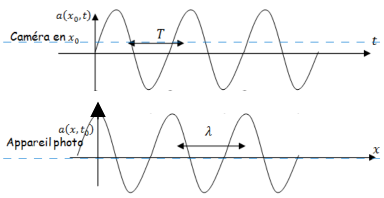






Avec $a(0,t_0) = A = f(t_0)$, on retrouve $a(x_A,t) = f(t_0) = f(t - \frac{x_A}{c})$

Représentations d'une OPH

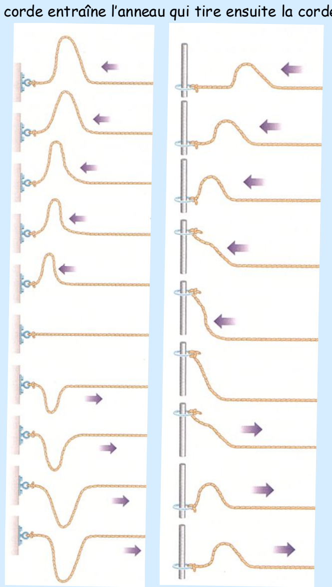


Commenté [A7]: Cf doc support http://clemspcreims.free.fr/Simulation/Ondes/melde/melde.htm

Commenté [A8]: La phase ϕ permet juste de proposer une écriture générale

Commenté [A9]:
Il est important de noter que cette célérité commune à toutes les pulsations est un phénomène particulier car dans de nombreux autres milieux, on montre que chaque pulsation peut avoir sa vitesse de propagation.

Commenté [A10]: Avec une extrémité fixe et par principe des actions réciproques la fixation exerce une force descendante sur la corde. Avec une extrémité mobile, la corde entraîne l'anneau qui tire ensuite la corde



Avec ce découplage entre les variables t et x, l'onde est en apparence statique, on parle d'onde stationnaire.

b) Résonances dans une cavité à une dimension

III- Solution et équation de propagation de d'Alembert

a) Equation de d'Alembert

Les lois physiques décrivant la propagation sans déformation d'une grandeur physique scalaire $a(M,t)$ conduisent à l'équation linéaire de d'Alembert :

$$\Delta a - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} = 0$$

Dans le cas d'une onde plane progressive $a(x,t)$ l'équation de d'Alembert devient : $\frac{\partial a^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial a^2}{\partial t^2} = 0$.

b) Retour sur l'onde plane progressive harmonique

L'analyse de Fourier justifie l'étude du cas particulier où f est une fonction sinusoïdale.

La linéarité de l'équation de d'Alembert permet d'utiliser la notation complexe dans le cas des OPPH, $a(M,t)$ s'écrit alors :

$$\underline{a}(M,t) = Ae^{j(\omega t - \vec{k}.\overrightarrow{OM} + \phi)} = \underline{A}e^{j(\omega t - \vec{k}.\overrightarrow{OM})}$$

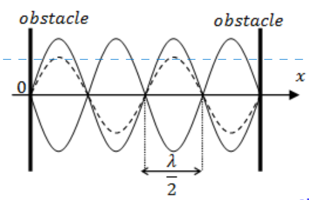
Cette écriture est utilisable pour toute équation d'onde linéaire et constitue donc un outil pour sa résolution.

Etude des ondes stationnaires

- L'amplitude de l'oscillation temporelle régit par $A(x) = -2A\_sin\,(kx)$ de telle sorte que tous les points vibrent en phase ou en opposition de phase
- La présence de nœuds de vibration c'est-à-dire de positions x_n d'amplitude constamment nulle. $a(x_n,t) = 0$ soit $kx_n = n\pi$ et $x_n = \frac{n\lambda}{2}$ avec $n \in \mathbb{N}$. D'autres positions x_v ont une amplitude de vibration maximale et sont appelés ventre de vibration $kx_v = \frac{(2n+1)\pi}{2}$ soit $x_v = \frac{n\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4}$

Etude d'une cavité résonante

Soit un milieu délimité entre $x = 0$ et $x = L$ et imposant $a(0,t) = a(L,t) = 0$. La propagation d'une OPH^+ $a(x,t) = Acos(\omega t - kx)$ émise continûment par une source entraîne la superposition de deux systèmes d'ondes stationnaires. Pour assurer la superposition ~~d'OPH^+ en phase en $x = 0$ ($a_1(x = 0, t) = Acos(\omega t)$,~~ $a_2(x = 0, t) = Acos(\omega t - 2kL)$, $a_3(x = 0, t) = Acos(\omega t - 4kL)$ ...), alors $kL = n\pi$ soit $L = \frac{n\lambda}{2}$



Solution de l'équation de d'Alembert :

On peut vérifier qu'une onde progressive décrite par $a(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$ est bien solution de cette équation. Posons $u = t - \frac{x}{c}$, on peut alors remarquer que :

$$\begin{cases} \frac{\partial a(x,t)}{\partial x} = \frac{da(x,t)}{du}\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{df}{du} \; et \; \frac{\partial a^2}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{d^2 f}{du^2} \\ \frac{\partial a(x,t)}{\partial t} = \frac{da(x,t)}{du}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{df}{du} \; et \; \frac{\partial a^2}{\partial t^2} = \frac{d^2 f}{du^2} \end{cases} \rightarrow \frac{\partial a^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial a^2}{\partial t^2} = 0$$

Notation complexe

Il s'agit ici d'utiliser les propriétés de linéarité de l'équation de d'Alembert (et son indépendance vis-à-vis de l'instant où l'on applique la loi) ainsi $\underline{a}(M,t)$ peut être vue comme la CL de deux OPPH :

$$\underline{a}(M,t) = a(M,t) + ja\left(M, t - \frac{T}{4}\right)$$

$$\underline{a}(M,t) = Acos(\omega t - kx) + jAsin(\omega t - kx) = Ae^{j(\omega t - kx)}$$

La notation complexe permet une simplification des calculs :

$\frac{\partial \underline{a}(M,t)}{\partial t} = j\omega \underline{a}(M,t)$ et en cartésiennes $\overrightarrow{grad}\,\underline{a}(M,t) = -j\vec{k}\underline{a}(M,t)$

Cette écriture permet aussi de décrire le cas d'ondes atténuées et déformées en supposant par exemple $\omega > 0$ et $k = k' - jk''$.

Dans la direction Ox alors $\underline{a}(M,t) = \underline{A}e^{-k''x}e^{j(\omega t - k'x)}$ avec k' et k'' que l'on trouve en injectant $\underline{a}(M,t)$ dans l'équation de propagation.

Commenté [A11]: Nous ferons la démonstration de ce résultat en TD.

Commenté [A15]: Cette source peut être en O, c'est le cas pour une corde vibrante. Dans ce cas on peut faire l'hypothèse d'une faible amplitude ce qui permet de supposer que l'on observe un nœud en O. Ce cas est traité rigoureusement en TD

Commenté [A12]: Un déphasage aléatoire conduirait à une vibration totale dont l'amplitude ne serait pas notable.
On peut aussi remarquer graphiquement que la condition $L = \frac{n\lambda}{2}$ superpose parfaitement les deux systèmes d'ondes stationnaires.
Plus quantitativement, l'OPH^+ est alors donnée, après N réflexions et en supposant qu'il existe un coef de réflexion (car la résonance n'est pas infinie), par :
$\underline{a}(x,t) = A(1 + r^2e^{-jk2L} + r^4e^{-jk4L} + \cdots)e^{j\omega t}$
$\underline{a}(x,t) \approx A\frac{e^{j\omega t}}{1 - r^2e^{-jk2L}}$
Le module d'une telle fonction présente des maximas pour $kL = n\pi$ soit $L = \frac{n\lambda}{2}$

Commenté [A13]: Là encore, il serait préférable de parler de milieu non absorbant et non dispersif

Commenté [A14]: Le principe de superposition est donc applicable. A noter qu'aux conditions aux limites et initiales fixées, cette équation n'admet qu'une seule et unique solution.

Commenté [A16]: On parle alors de pseudo-onde plane progressive

Commenté [A17]: Toutes ces notions sont présentées dans la vidéo suivante :
https://www.youtube.com/watch?v=tsNmQ9Utn9M