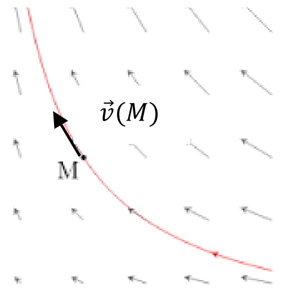
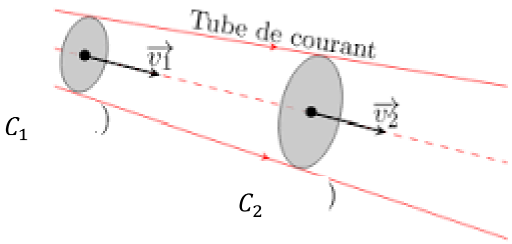
Chapitre 6 : Fluides en écoulements stationnaires

I- Vocabulaire(document1)

Nous allons étudier des écoulements stationnaires pour lesquels il est donc possible de caractériser chaque élément mésoscopique centré en M par un <u>champ des vitesses</u> $\vec{v}(M)$, des masses volumique $\rho(M)$, des pressions $P(M)$….

Ligne de champ



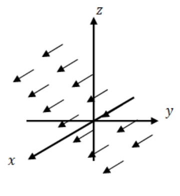
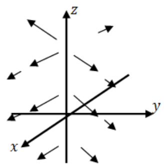
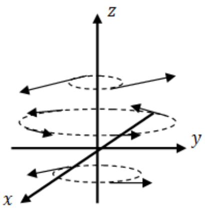


II- Les débits (document 2 et 3)

a) Débit volumique

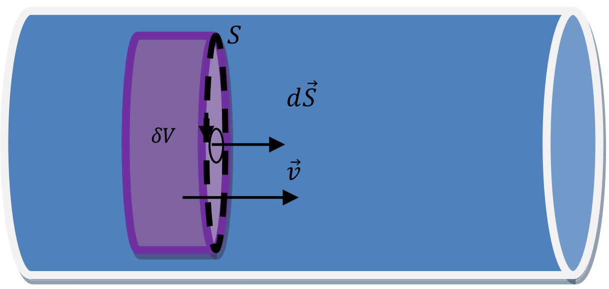
D_v ($[D_v] = [m^3.s^{-1}]$) mesure le volume de fluide traversant une surface S par unité de temps.

Exemples de description Eulérienne (document 1)

Exemple	Représentation
Ecoulement uniforme Le champ des vitesses est le même en tout point $\vec{v}(M) = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{u_x} \\ \vec{u_y} \\ \vec{u_z} \end{matrix}$	
Ecoulement radial à symétrie cylindrique En cylindrique, un tel écoulement vérifie : $\vec{v}(M) = v_r(r)\vec{u_r}$ Il est invariant par rotation autour de l'axe Oz et par translation suivant l'axe Oz $\vec{v}(M) = \begin{pmatrix} \frac{K}{r} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{u_r} \\ \vec{u_\theta} \\ \vec{u_z} \end{matrix}$ Si $K > 0$ on parle de source, si $K < 0$ de puit	
Ecoulement orthoradial à symétrie cylindrique En cylindrique, un tel écoulement vérifie : $\vec{v}(M) = v_\theta(r)\vec{u_\theta}$ Il est invariant par rotation autour de l'axe Oz et par translation suivant l'axe Oz $\vec{v}(M) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{K}{r} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{u_r} \\ \vec{u_\theta} \\ \vec{u_\varphi} \end{matrix}$ Ce type d'écoulement est qualifié de vortex	

<u>Débit volumique et massique</u>

Soit un écoulement dans une canalisation et une section droite S orientée :



Supposons que l'écoulement soit uniforme et axial alors $\delta V = \|\vec{v}\| dtS$. Le débit est alors donné par

$$D_v = \|\vec{v}\| S$$

b) Débit massique D_m et vecteur densité de flux de masse $\vec{j}$

D_m ($[D_m] = [kg.s^{-1}]$) mesure la masse de fluide traversant une surface S par unité de temps.

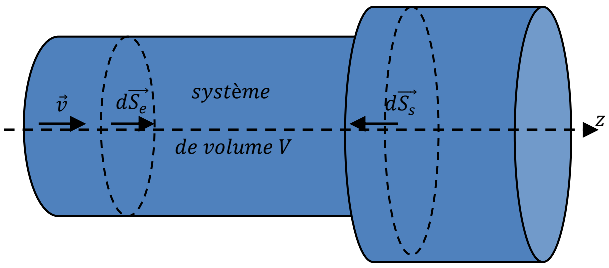
Dans le cas d'un fluide incompressible, de masse volumique ρ_0, on a $D_m = \rho D_v$

III) Bilan de masse et applications

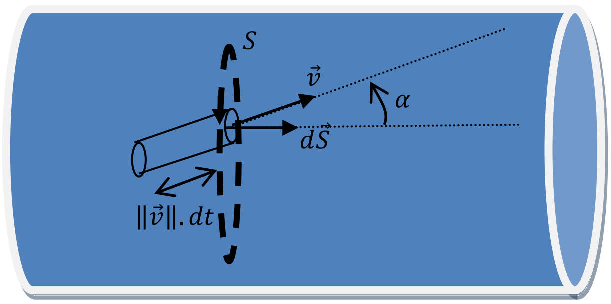
Nous postulons que la masse ne peut être créée ou détruite : elle est conservée. Si la masse d'un système ouvert varie c'est qu'il y a un défaut entre le débit massique rentrant et sortant.

a) Mise en équation du bilan

Soit m la masse contenue dans d'un système ouvert de volume V. Pendant dt, une masse δm_e rentre dans V et une masse δm_s sort de V. Les conventions d'orientation impliquent $\delta m_e > 0$ et $\delta m_s < 0$ pour les débits massiques respectivement sortant et rentrant.



Si l'on considère un écoulement non uniforme et non axial alors il faut prendre quelques précautions pour évaluer δV et raisonner localement :



Donc $\delta^2 V = \|\vec{v}\| cos\alpha dS dt$ et le volume qui va traverser dS pendant dt est $\delta V = \iint_S \|\vec{v}\| cos\alpha dS\, dt$

Donc $D_v = \iint_S \|\vec{v}\| cos\alpha dS = \iint_S \vec{v}.d\vec{S}$

Soit une relation plus générale :

$$D_v = \iint_S \vec{v}(M).d\vec{S}(M)$$

Dans le cas d'un écoulement quelconque, la quantité $\delta m = \iint_S \rho(M)\vec{v}(M).d\vec{S}(M)dt$ représente la masse élémentaire δm traversant la surface S centrée autour de M pendant l'intervalle de temps dt.

Conventions mathématiques et physiques

Le bilan de masse ci-contre s'écrit alors :

$$\frac{dm}{dt} = \oiint \vec{j}.d\overrightarrow{S_{int}}$$

Où $d\overrightarrow{S_{int}}$ est orienté vers l'intérieur du volume de contrôle. Avec $d\overrightarrow{S_{int}} = -d\overrightarrow{S_{ext}}$

$$\frac{dm}{dt} = -\oiint \vec{j}.d\overrightarrow{S_{ext}}$$

En utilisant l'opérateur divergent :

$$\frac{dm}{dt} = -\iiint_V div\vec{j}.dV$$

b) Ecoulement stationnaire

Dans le cas d'un écoulement stationnaire $\frac{dm}{dt} = 0$ et $D_{me} = |D_{ms}|$ pour toute section de la canalisation : on a conservation du débit massique $\rightarrow D_m = Cte$

c) Ecoulement stationnaire d'un fluide incompressible

Un fluide incompressible est associé à une masse volumique $\rho(M) = \rho_0 = Cte$. En écoulement stationnaire, on a :

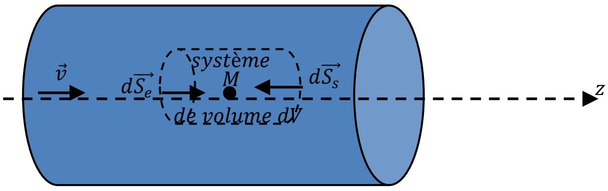
On a conservation du débit volumique : $D_v = Cte$ pour toute section de la canalisation.

Rq : Le résultat précédent s'étend aussi aux gaz qui peuvent être considérés comme peu comprimés pour des écoulements stationnaires de vitesse inférieure à 300m/s

Analyse locale

Considérons un volume élémentaire mésoscopique dV contenant une masse $dm = \rho(M,t)$ centrée sur le point M.

L'écoulement est supposé axial : $\vec{j} = j_z(x,y,z,t)\overrightarrow{u_z}$



$$dm(M,t+dt) - dm(M,t) = j_z(x,y,z,t)dS_e dt - j_z(x,y,z+dz,t)dS_s dt$$

$$\frac{\partial dm}{\partial t}dt = -\frac{\partial j_z}{\partial z}dVdt$$

Donc :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial j_z}{\partial z}$$

Dans le cas d'un écoulement quelconque :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial j_z}{\partial z} - \frac{\partial j_y}{\partial y} - \frac{\partial j_x}{\partial x}$$

On retrouve l'expression de l'opérateur divergent :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -div\vec{j}$$

Dans le cas d'un écoulement stationnaire $(\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0)$ d'un fluide incompressible $(div\vec{j} = \rho_0 div\vec{v})$:

$$div\vec{v} = 0$$

On dit alors que $\vec{v}$ est à flux conservative car :

$$\iiint_V div\vec{j}.dV = 0 \leftrightarrow \oiint \vec{j}.d\overrightarrow{S_{ext}} = 0 \leftrightarrow |D_{v,e}| = D_{vs}$$