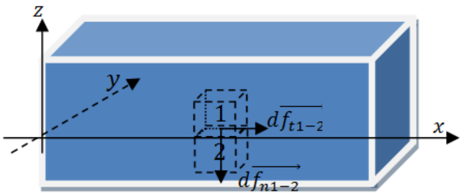
Chapitre 7 : Du premier principe à l'équation de Bernoulli

I- Fluide réel

a) Force de viscosité

Soient deux volumes mésoscopiques de fluide notés 1 et 2 de surface commune dS en écoulement unidirectionnel $\vec{v} = v_x(z)\overrightarrow{u_x}$.

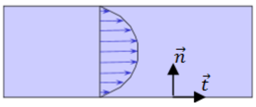


La particule de fluide 1 exerce sur 2 deux composantes :

- Une force normale $d\overrightarrow{f_{n1-2}} = -PdS\overrightarrow{u_z}$ traduisant l'effet de la pression P
- Une force tangentielle $d\overrightarrow{f_{t1-2}} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial z} dS\overrightarrow{u_x}$ traduisant un effet de cisaillement appelée force de viscosité. On note η le coefficient de viscosité (en $Pa.s$). η est pour de nombreux fluides (eau, pétrole, air…) indépendant du gradient de vitesse.

b) Profil des vitesses

Dans le cas d'un fluide réel en écoulement laminaire, on peut observer le profil ci-dessous et on a $\overrightarrow{v_{paroi}}.\vec{n} = 0$ et $\overrightarrow{v_{paroi}}.\vec{t} = 0$



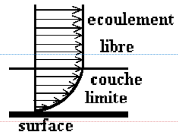
Si l'on suppose un fluide parfait ($\eta = 0$) alors on a juste $\overrightarrow{v_{paroi}}.\vec{n} = 0$ et :

Origine de la viscosité

L'origine microscopique de la viscosité tient au mouvement thermique (brownien) des molécules du fluide. La vitesse d'une particule de fluide possède deux composantes : une composante thermique, désordonnée, et une composante macroscopique liée au mouvement d'ensemble du fluide. Lorsqu'une particule passe d'une couche à sa voisine plus lente, elle emporte avec elle sa vitesse d'ensemble, propre à la couche d'où elle vient. Lors des collisions avec les particules de la couche d'arrivée, elle partage l'excédent de quantité de mouvement qu'elle possède, et ce transfert, compte tenu de la dynamique chaotique des particules, est irréversible. En moyennant ce transfert de quantité de mouvement entre couches voisines, on obtient un effet macroscopique.

Notion de couche limite

L'expérience montre que les fluides réels mouillent les obstacles fixes, c'est-à-dire qu'à l'échelle moléculaire, une couche de liquide se fixe sur un obstacle. Ainsi, la vitesse du fluide relativement à la conduite augmente de zéro au niveau de la paroi jusqu'à une valeur correspondant à l'écoulement externe. Cette zone de transition est appelée couche limite.



Dans une conduite cylindrique, les couches limites vont interférer ensembles pour donner, en régime laminaire, un profil parabolique.

Coefficient de viscosité

Fluide	Viscosité à 20°C (Pl ou $Pa.s$)
Eau	$1,0 \times 10^{-3}$
Pétrole	$0,66$
Air	$1,8 \times 10^{-5}$

Fluide Newtonien

Si la viscosité ne dépend que de la nature de l'échantillon et de sa température alors le fluide est dit newtonien.

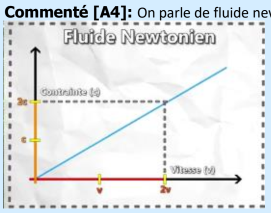
Si la viscosité est fonction de la vitesse de l'écoulement alors il est non newtonien.

Commenté [A1]: Comment Zidane a marqué contre les anglais à l'euro 2004 ?
https://www.youtube.com/watch?v=QtP_bh2lMXc
Comment expliquer la force portance qui s'exerce sur les ailes d'avions ?

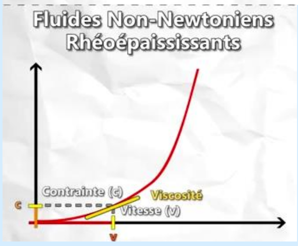
Commenté [AM2]: Quelques vidéos montrant le pouvoir mouillant des fluides (manifestation de la viscosité des fluides) et de la diffusion de la quantité de mouvement par l'intermédiaire des forces de viscosité
https://www.youtube.com/watch?v=KLm7PF_Uuk0
https://www.youtube.com/watch?v=k7ZZtxdtmeQ

Commenté [AM3]: On peut retrouver ces deux composantes en prenant un modèle de gaz parfait en écoulement. Sur la frontière entre les deux particules de fluide se produit des échanges de particules :
- la force pressant traduit un échange de quantité de mouvement verticale. Un bilan conduit à la force volumique $-\overrightarrow{grad}PdV$
-La force de viscosité traduit un échange de quantité de mouvement horizontal (la particule la plus lente est accélérée et la plus rapide est ralentie). Un bilan conduit à la force volumique $\eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} dV\overrightarrow{u_x} = \eta \Delta \vec{v} dV$

Commenté [A4]: On parle de fluide newtonien :



Il existe deux grands types de fluides non Newtoniens



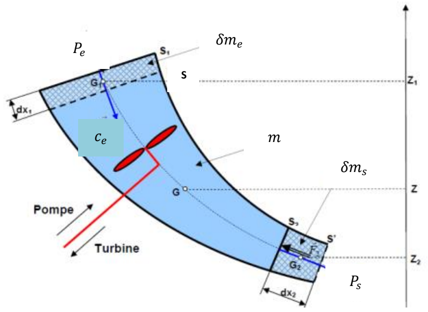
Quelques expériences sur les fluides non newtoniens
-http://www.futura-sciences.com/sciences/videos/stupefiant-fluide-non-newtonien-haut-parleur-50000083/
-http://www.maxisciences.com/exp%E9rience/mi-solide-mi-liquide-fabriquez-chez-vous-un-fluide-extraordinaire_art33566.html

Commenté [AM5]: Nous verrons en TD que la force tangentielle de viscosité explique le profil parabolique des vitesses lors d'un écoulement laminaire

II- Ecoulement stationnaire d'un fluide parfait et incompressible

a) Position du problème

Soit un tube de courant suffisamment étroit pour que la pression P soit uniforme sur toute section droite.



Le système fermé étudié est délimité entre les sections S_1 et S_2 à l'instant t et entre les sections S et S' à l'instant $t+dt$. Nous supposerons qu'un travail indiqué δW_i peut être échangé avec une machine (en revanche aucun transfert thermique avec l'extérieur ne sera transmis : $Q=0$).

b) Hypothèses

- stationnaire : $D_m = \frac{\delta m}{dt} = Cte$
- adiabatique : $q = 0$
- pas de frottement (fluide parfait) et localement mécaniquement réversible donc isentropique : $dS = 0 \to dh = Tds + vdP = vdP$
- fluide incompressible : $v = \frac{1}{\rho} = cte$

c) Application du 1e principe au système fermé

$$\Delta_s h + \Delta_s e_c + \Delta_s e_p = w_i + q$$

$$\left(\frac{\Delta_s P}{\rho} + \Delta_s \frac{c^2}{2} + g\Delta_s z\right) = \delta W_i$$

Le long d'une ligne de courant et pour un écoulement stationnaire d'un fluide parfait et incompressible traversant une machine fournissant un travail massique w_i:

$$\Delta_s\left(\frac{c^2}{2} + gz + \frac{P}{\rho}\right) = \Delta\left(\frac{c^2}{2} + gz + \frac{P}{\rho}\right) = w_i$$

Sans aucune machine : $\left(\frac{c^2}{2} + gz + \frac{P}{\rho}\right) = Cte(Bernoulli)$

Rappels : 1e principe des systèmes ouverts en écoulement stationnaire

Le système étudié étant fermé, on a donc :

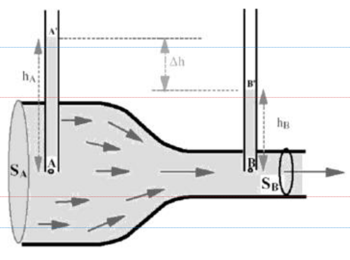
$$\left(E_{c_{mac},com}(t+dt) + \frac{\delta m c_s^2}{2}\right) - \left(E_{c_{mac},com}(t) + \frac{\delta m c_e^2}{2}\right) + \left(E_{p_{mac},com}(t+dt) + \delta m g z_s\right) - \left(E_{p_{mac},com}(t) + \delta m g z_e\right) + \left(U_{,com}(t+dt) + \delta m u_s\right) - \left(U_{com}(t) + \delta m u_e\right) = P_e \delta m v_e - P_s \delta m v_s + \delta W_i + \delta Q$$

Soit, d'après l'hypothèse stationnaire :

$$\delta m\left(h_s - h_e + \frac{c_s^2}{2} - \frac{c_e^2}{2} + gz_s - gz_e\right) = \delta W_i + \delta Q$$

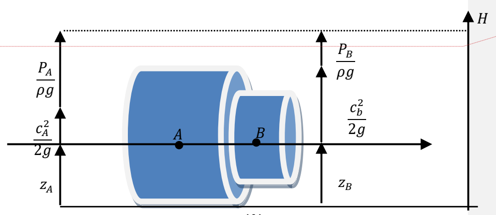
Effet venturi

Il est alors possible d'appliquer Bernoulli entre A et B: $\frac{P_A}{\rho} + \frac{c_A^2}{2} = \frac{P_B}{\rho} + \frac{c_B^2}{2}$ si l'écoulement est bien stationnaire et le fluide parfait et incompressible. On a aussi la conservation du débit volumique $c_A S_A = c_B S_B$ Ce qui implique $P_s < P_e$



Notion de charge d'un fluide

On peut écrire la relation de Bernoulli sous la forme :$H = z + \frac{c^2}{2g} + \frac{P}{\rho g} = Cte$ ce qui se traduit par une conservation d'une hauteur appelée charge de l'écoulement.



Commenté [A6]: Donc en toute rigueur nos résultats s'appliquent le long d'une ligne de courant. Cependant si le fluide est parfait et initialement sans tourbillon le profil des vitesses et des pressions tend à devenir uniforme sur toute section de la canalisation.

Commenté [AM12]: Ce bilan énergétique excluant tout effet visqueux permet l'interprétation de nombreuses expériences :

https://www.youtube.com/watch?v=E32YHDTDy-4

Commenté [A7]: Cette hypothèse reste pertinente même en présence de frottement qui échauffe les parois de la conduite car ces transferts sont souvent lents et conduisant à de faibles variations de température. En effet, lors d'une vidange de voiture, l'huile ne voit pas sa température varier notablement

Commenté [AM8]: Ces hypothèses vont nous faire « perdre » tout ce que la thermodynamique introduit : S, T et Q

Commenté [AM9]: L'unicité des phénomènes de diffusion implique que négliger la diffusion thermique, revient à négliger également les effets visqueux.

Commenté [A10]: La pression n'est certes pas uniforme sur toute la canalisation mais elle ne présente pas de discontinuité locale

Commenté [AM11]: Le qualificatif parfait prend en compte l'absence d'effet visqueux et de transferts qui sont tous les deux des phénomènes diffusifs

d) Approximations courantes

Soit une canalisation horizontale siège d'un écoulement de rayon $R \approx 5cm$. Sur chaque section droite nous pouvons supposer :

- Le champ des vitesses uniforme avec l'hypothèse d'un fluide parfait,
- La pression uniforme car $\Delta P = \rho_f g(2R) \approx \frac{P_{atmo}}{100}$
- L'altitude associée à une altitude moyenne $z = Cte$

Dans ces conditions la relation de Bernoulli s'écrit souvent entre deux sections de la conduite.

III- Ecoulement stationnaire d'un fluide réel et incompressible

a) Perte de charge régulière

Avec un fluide réel en écoulement dans un capillaire, on adapte l'écriture de la relation de Bernoulli précédente entre deux sections :

$$\Delta\left(e_c + e_p + \frac{P}{\rho}\right) = w_f$$

Où $w_f < 0$ est le travail massique des forces de viscosité qui dissipe l'énergie mécanique du fluide dans la conduite.

Pour un capillaire horizontal de section constante et entre deux sections distantes de L : $\Delta\frac{P}{\rho} = w_f$

On pourra rencontrer $w_f = -KLD_v$ (avec K constant) et donc exprimer la diminution de pression :

$$|\Delta P| = R_h D_v$$

Où $R_h = K\rho L$ est appelée résistance hydraulique

b) Perte de charge singulière

Ce type de perte se produit quand la conduite impose des brusques variations de directions. Pour ces pertes $w_f = -K\frac{c^2}{2}$ avec K une constante fonction de la géométrie de la canalisation.

Modèle de poiseuille

Considérons un tube de courant de longueur L centré sur l'axe z d'un capillaire de rayon R. Le volume de ce tube de champ est $V = \pi r^2 L$ et subit une force de viscosité donnée par :

$$\vec{F_t} = \eta\left(\frac{dv_x}{dr}\right)_{en\ r} 2\pi r L\vec{u_z}$$

La force pressante motrice est :

$$\vec{F_P} = (P(z) - P(z+L))\pi r^2\vec{u_z} = \Delta P\pi r^2\vec{u_z}$$

On prend typiquement $\vec{v} = v_z(r)\vec{u_z}$, ce qui assure l'absence d'accélération le long d'une ligne de courant. Donc, il y a compensation des deux forces :

$$r\Delta P = -2\eta\left(\frac{dv_z}{dr}\right)L$$

$$\Delta P\int_r^R rdr = -2\eta L\int_{v(r)}^0 dv = 2\eta L v(r)$$

$$v(r) = \frac{\Delta P(R^2 - r^2)}{4\eta L}$$

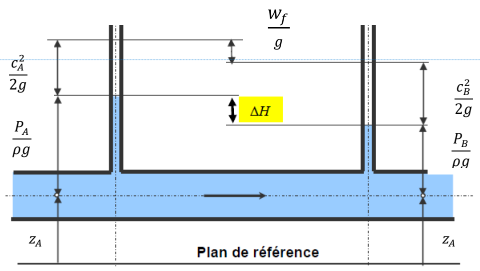
Et donc un débit volumique :

$$D_v = \iint v(r) r d\theta dr = \frac{\Delta P}{8\eta L}\pi R^4$$

Soit : $\Delta P = R_h D_v$

On met alors en évidence une perte de charge :

$$\Delta H = \frac{|\Delta P|}{\rho g}$$



Commenté [AM16]: https://www.youtube.com/watch?v=P05yYbnApFc

Commenté [A13]: La pression varie peu verticalement car elle suit la loi de la statique des fluides….donc sur une section de 10cm on peut supposer la pression uniforme

Commenté [A14]:
Point de vue thermodynamique :
Si réel incompressible alors le travail des forces intérieures se limite aux forces non conservatives de type visqueux qui échauffent le gaz, c'est donc
$du + de_c + de_p = du + \left(-de_p + \delta w + \delta w_f\right) + de_p = \delta w$
$du = -\delta w_f > 0$
Point de vue mécanique :
$dE_c + dE_p = P_e\delta V_e - P_s\delta V_s + \delta W_f = 0$
$\delta W_f = -(P_e - P_s)\delta V$
On retrouve une analyse purement mécanique qui décrit une perte énergétique sans faire part d'une analyse thermique.
La thermodynamique est plus complète !

Commenté [A15]: On peut faire une analogie forte avec l'électrocinétique.
On peut d'ailleurs retrouver l'équivalent d'une puissance Joule en utilisant le TPC :
$\frac{dE_c}{dt} = P_{int} + P_{ext}$
Avec un capillaire siège d'un écoulement stationnaire d'un fluide incompressible, on a :
$\frac{dE_c}{dt} = 0$
$P_{int} = P_f = -P_{ext} = -(\iint_S P_e\vec{v}.d\vec{S} - \iint_S P_S\vec{v}.d\vec{S})$
$P_f = -D_v|\Delta P| = -R_h {D_v}^2$