

Afin de garantir leur fonctionnement, les gazoducs sont régulièrement inspectés et nettoyés. On place alors dans les gazoducs des robots intelligents capables de les nettoyer en raclant les éventuelles impuretés.

Dans cette partie, on se propose d'analyser une méthode très simple qui pourrait permettre de détecter *a priori* la présence et la position d'un obstacle dans un gazoduc rectiligne de longueur connue. Pour que la méthode puisse fonctionner, il faut faire du gazoduc une cavité sonore résonante. On se propose tout d'abord de faire une analogie avec une cavité résonante électromagnétique. Aucune connaissance sur les ondes sonores n'est requise.

III.A – Analogie électromagnétique

Soit une cavité vide taillée à l'intérieur d'un conducteur parfait, entre les abscisses $z = 0$ et $z = L$ (figure 2). Un émetteur électromagnétique engendre en continu une onde électromagnétique arrivant en incidence normale sur la face d'équation $z = L$.

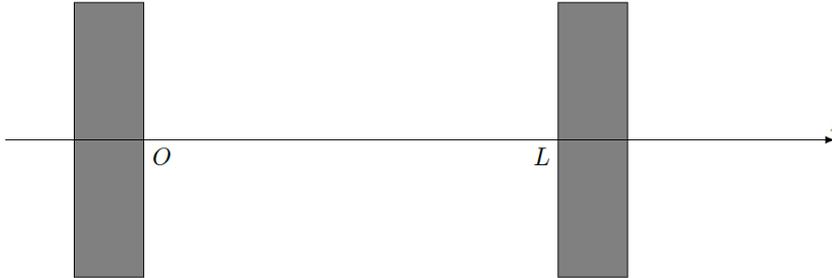


Figure 2 Schéma de la cavité électromagnétique

On cherche le champ électrique dans la cavité sous forme $\vec{E}(z, t) = f(z) \sin(\omega t) \vec{e}_x$.

III.A.1) Donner la valeur du champ électrique dans un conducteur parfait.

III.A.2) Établir, à partir des équations de Maxwell, l'équation différentielle vérifiée par $\vec{E}(z, t)$. Comment appelle-t-on ce type d'équation ?

III.A.3) Déterminer l'expression générale de la fonction $f(z)$ en fonction de ω , $c = (\mu_0 \epsilon_0)^{-1/2}$ et en introduisant deux constantes que l'on ne demande pas de préciser dans cette question.

III.A.4) En utilisant, la relation de passage donnée dans le formulaire et appliquée aux deux interfaces métal/vide, déterminer l'expression explicite de $\vec{E}(z, t)$ en fonction de l'amplitude E_0 du champ électrique, L , c et d'un entier naturel non nul n . Quelle est la nature de l'onde obtenue ?

III.A.5) Déterminer la longueur d'onde du mode n ainsi que sa fréquence.

III.A.6) Quelle distance sépare deux nœuds relatifs au champ électrique pour le mode n ?

III.A.7) Décomposer le champ électrique du mode n en deux ondes planes progressives monochromatiques que l'on explicitera. Interpréter.

III.B – Réalisation d'une cavité sonore résonante

On place un haut-parleur, alimenté par une tension sinusoïdale $E(t)$ de pulsation ω , à l'extrémité d'un gazoduc fermé de longueur L contenant de l'air de masse molaire M , de masse volumique ρ , à la température T et à la pression P . On notera γ le rapport des capacités thermiques à pression constante et à volume constant de l'air. On suppose que le régime permanent s'installe instantanément. L'ensemble est à symétrie de révolution d'axe (Oz) , l'origine O étant prise sur la membrane du haut-parleur lorsqu'il n'est pas alimenté.

La membrane du haut-parleur a un mouvement de translation rectiligne sinusoïdal suivant l'axe (Oz) , d'amplitude très faible, à la vitesse $\vec{v}_{\text{HP}}(t) = v_{\text{HP}}(t) \vec{e}_z = V_{\text{HP}} \cos(\omega t) \vec{e}_z$.

On modélise le dispositif comme indiqué figure 3. La membrane du haut-parleur, assimilée à un disque d'aire S , est reliée élastiquement au bâti par un ressort de rappel de constante de raideur k_e exerçant une force $\vec{T} = -k_e z_{\text{HP}} \vec{e}_z$ sur la membrane lorsqu'elle est située en z_{HP} . La membrane est solidaire d'une tige métallique de longueur a pouvant évoluer sans frottement en translation rectiligne parallèlement à (Oz) sur deux rails métalliques. L'ensemble baigne dans un champ magnétostatique uniforme et stationnaire $\vec{B} = B \vec{e}_y$. L'inductance du circuit est L_b , sa résistance est R . En dehors de l'action des forces de pression, l'amortissement de la

membrane est modélisé par une force de frottement fluide $\vec{f} = -\lambda\vec{v}_{\text{HP}}$. Lorsque le haut-parleur est alimenté par un générateur de force électromotrice $E(t)$, un courant d'intensité $i(t)$ circule dans le circuit. La masse de l'ensemble {membrane + tige} est notée m .

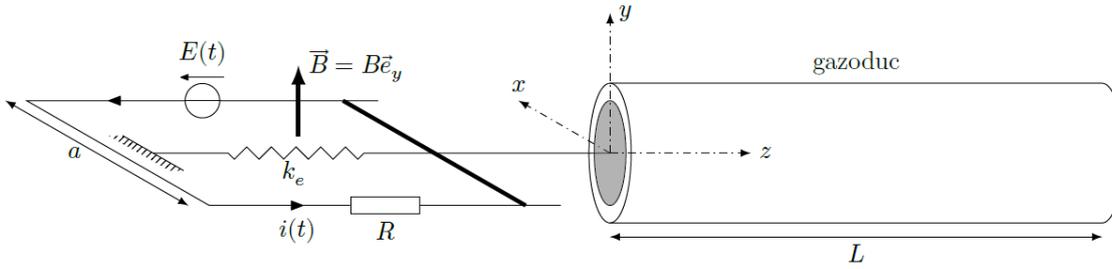


Figure 3 Modélisation du haut-parleur alimenté

On admet que l'équation de propagation d'une onde sonore dans l'air est $\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = \frac{M}{\gamma RT} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}$ et que la relation entre la vitesse $\vec{v} = v\vec{e}_z$ d'une particule mésoscopique d'air dans le gazoduc et la pression est donnée par $\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\text{grad} P$. En l'absence d'onde sonore, la pression de l'air dans la conduite est notée P_0 .

III.B.1) L'extrémité du gazoduc située en $z = L$ est supposée parfaitement réfléchissante. On montre que la pression associée à l'onde sonore s'écrit alors $P(z, t) = \frac{\rho c_s V_{\text{HP}}}{\sin(kL)} \sin(\omega t) \cos(kz - kL) + P_0$, où c_s est la célérité des ondes sonores dans l'air.

- a) Donner l'expression de la célérité des ondes sonores dans l'air en fonction de M , R , T et γ .
- b) Trouver la relation reliant k et ω .
- c) Déterminer l'expression de la vitesse v d'une particule mésoscopique d'air et vérifier que les conditions aux limites en $z = 0$ et $z = L$ sont satisfaites.

III.B.2) Du fait de la réception de l'onde réfléchiée en $z = L$, le haut-parleur est « perturbé » : son impédance va être modifiée et c'est sa mesure qui va être intéressante comme on va le montrer grâce aux questions suivantes.

- a) En supposant, pour simplifier, que la pression de l'air reste égale à P_0 à gauche de la membrane, déterminer l'expression littérale de la résultante des forces de pression exercée par l'air sur la membrane.
- b) Établir l'équation mécanique (M) relative au fonctionnement du haut-parleur.
- c) Établir l'équation électrique (E) relative au fonctionnement du haut-parleur.
- d) On définit l'impédance complexe \underline{Z} du haut-parleur par le rapport $\underline{Z} = \frac{E}{i}$. Montrer que

$$\underline{Z} = R + jL_b\omega + \frac{B^2 a^2}{j\omega m + \frac{k_e}{j\omega} + \lambda - j \frac{\rho c_s S}{\tan(\omega L / c_s)}}$$

- e) La figure 4 donne l'allure de la courbe représentant $|\underline{Z}|$ en fonction de la fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$. Commenter et interpréter : en quoi cette étude peut être utile à la détection d'un obstacle dans le gazoduc ?

III.B.3) L'expérience a été réalisée très simplement en laboratoire de lycée avec un tube en PVC, isolé avec de la laine de verre et du liège, un haut-parleur à l'une des extrémités et une paroi escamotable à l'autre permettant de faire varier la longueur L du tube. Des photos du matériel sont représentées figure 5.

Comme l'impédance d'un haut-parleur reste généralement inférieure à 50Ω (sauf aux fréquences très élevées), on réalise le montage schématisé figure 6 contenant une résistance $R = 1,0 \text{ k}\Omega$.

- a) Expliquer comment les mesures données par les deux voltmètres permettent de calculer $|\underline{Z}|$.
- b) Pour un tube de longueur L donnée, on obtient la courbe de la figure 7 aux basses fréquences. Commenter, interpréter puis déterminer L .
- c) En réalité, on a réglé la paroi escamotable de façon à avoir $L = 2,1 \text{ m}$. Commenter cette valeur en lien avec le résultat de la question précédente.

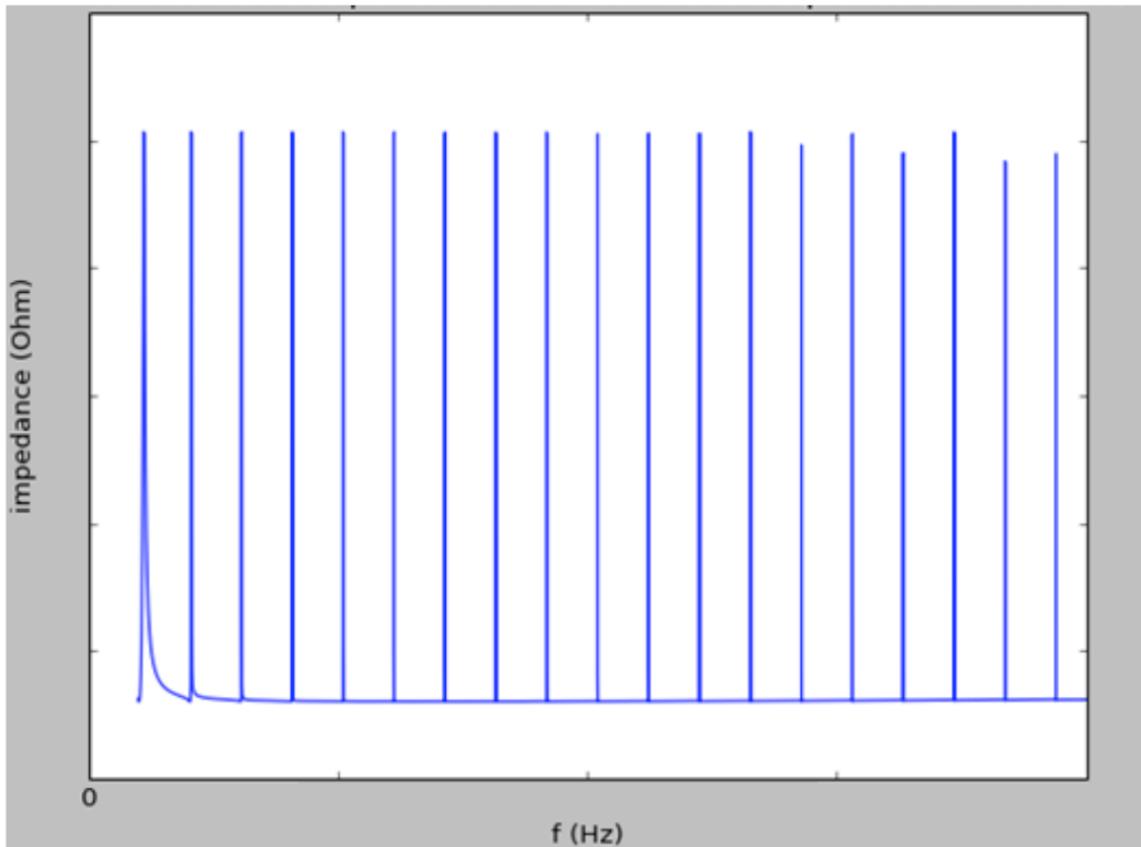


Figure 4 Courbe théorique représentant l'impédance en fonction de la fréquence

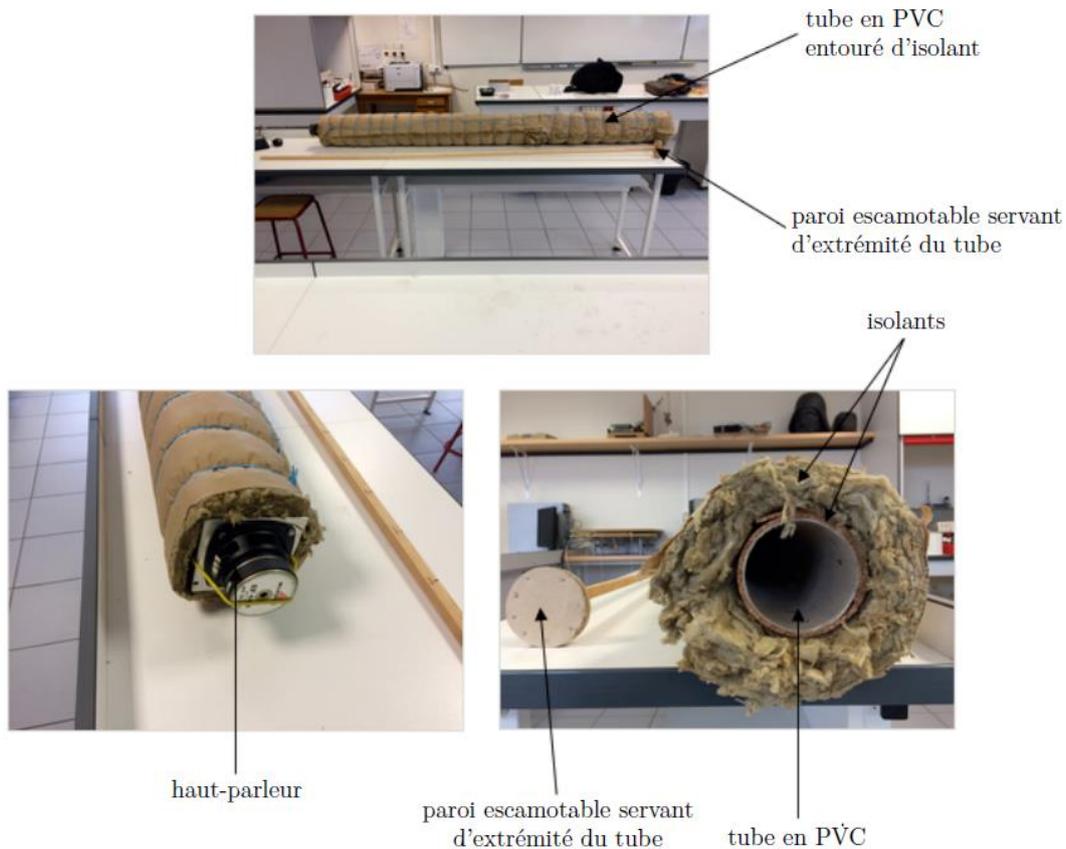


Figure 5 Quelques photos du matériel

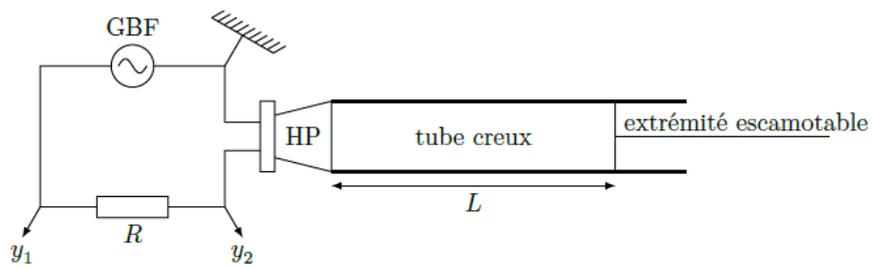


Figure 6 Réalisation du montage expérimental

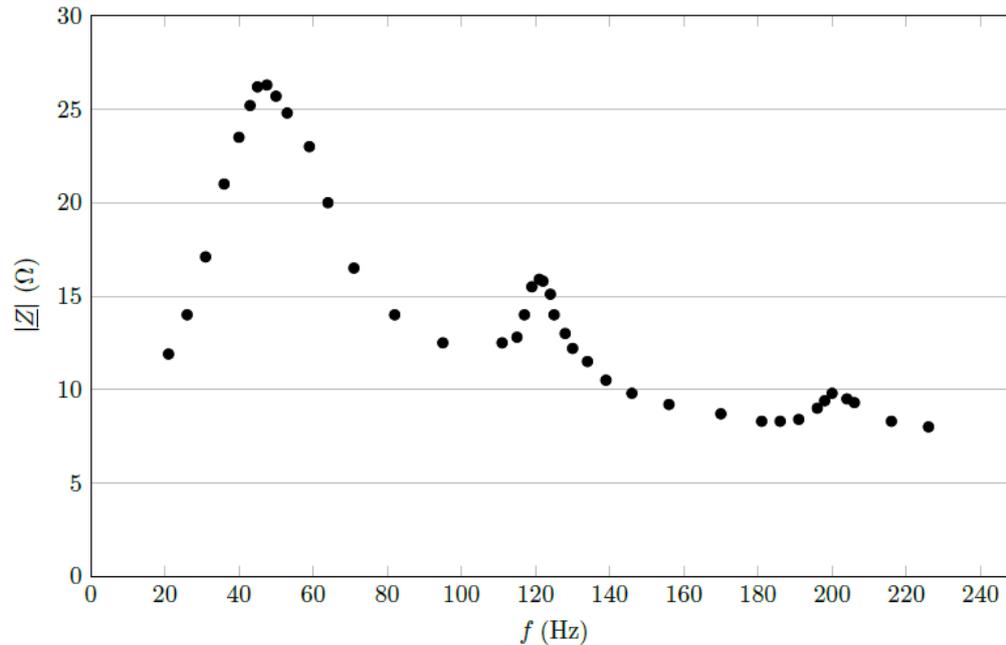


Figure 7 Courbe expérimentale représentant l'impédance en fonction de la fréquence

Données numériques

Constante des gaz parfaits	$R = 8,314 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$
Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$
Permittivité diélectrique du vide	$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$
Célérité des ondes sonores dans l'air	$c_s = 3,4 \times 10^2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$

Formulaire

- Pour tous réels p et q : $\sin p \sin q = \frac{1}{2}(\cos(p - q) - \cos(p + q))$
- Pour tout champ de vecteur \vec{A} : $\text{rot}(\text{rot } \vec{A}) = \text{grad}(\text{div } \vec{A}) - \Delta \vec{A}$
- Relation de passage pour le champ électrique : $\vec{E}(M^+, t) - \vec{E}(M^-, t) = \frac{\sigma(M, t)}{\epsilon_0} \vec{n}_{M^- \rightarrow M^+}$

III.A.1 Dans un conducteur parfait, le champ électrique est nul : $\vec{E}_{conducteur} = \vec{0}$.

III.A.2 On part de l'équation de Maxwell-Faraday ($\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$) dont on prend le rotationnel :

$$\text{rot} \left(\text{rot } \vec{E} \right) = \text{rot} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \iff \text{grad} \left(\text{div } \vec{E} \right) - \Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\text{rot } \vec{B} \right)$$

On utilise alors les équations de Maxwell-Gauss ($\text{div } \vec{E} = 0$) et de Maxwell-Ampère ($\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$) et on remplace. On obtient alors l'équation de d'Alembert ou équation de propagation :

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \text{ soit ici : } \boxed{\frac{\partial^2 \vec{E}(z,t)}{\partial z^2} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}(z,t)}{\partial t^2} = \vec{0}}$$

III.A.3 On remplace alors $\vec{E}(z,t)$ dans l'équation de propagation par la forme recherchée :

$$f''(z) \sin(\omega t) \vec{e}_x + \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 f(z) \sin(\omega t) \vec{e}_x = \vec{0} \iff \boxed{f''(z) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 f(z) = 0}$$

On reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique. La solution s'écrit donc : $\boxed{f(z) = A \cos\left(\frac{\omega}{c}z\right) + B \sin\left(\frac{\omega}{c}z\right)}$.

III.A.4 Appliquons la relation de passage en $z = 0$: $\vec{E}(z = 0^+, t) - \vec{0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{e}_z$ soit $f(0) \sin(\omega t) = 0$. On en déduit que $f(0) = 0$ d'où $\boxed{A = 0}$.

De même en $z = L$: $\vec{0} - \vec{E}(z = L^-, t) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{e}_z$ implique $f(L) \sin(\omega t) = 0$ soit $B \sin\left(\frac{\omega}{c}L\right) = 0$. On doit donc avoir $\frac{\omega}{c}L = n\pi, n \in \mathbb{N}^*$.

Finalement, en notant E_0 l'amplitude du champ électrique, on trouve : $\boxed{\vec{E}(z,t) = E_0 \sin\left(\frac{n\pi}{L}z\right) \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) \vec{e}_x}$. Il s'agit du produit d'une fonction spatiale par une fonction temporelle, on a donc une onde stationnaire.

III.A.5 Le mode n a donc pour longueur d'onde $\boxed{\lambda_n = \frac{2L}{n}}$ et pour fréquence $\boxed{f_n = \frac{nc}{2L}}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

III.A.6 Deux nœuds successifs du champ électrique pour le mode n sont séparés de $\boxed{\frac{\lambda_n}{2} = \frac{L}{n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

III.A.7 En utilisant la formule de trigonométrie fournie, il vient :

$$\boxed{\vec{E}_n(z,t) = \frac{E_0}{2} \left(\cos\left(\frac{n\pi c}{L}t - \frac{n\pi}{L}z\right) - \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t + \frac{n\pi}{L}z\right) \right) \vec{e}_x}$$

L'onde stationnaire est la superposition de deux ondes progressives de même amplitude, se propageant à la même vitesse mais en sens inverse. Le métal renvoie entièrement l'onde incidente.

III.B Réalisation d'une cavité sonore résonnante

III.B.1

a) Par analogie avec l'équation de propagation électrique, on déduit que $\frac{1}{c_s^2} = \frac{M}{\gamma RT}$ soit $\boxed{c_s = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}}$.

b) Il s'agit de la relation de dispersion : en remplaçant dans l'équation de propagation, on trouve : $\boxed{k^2 = \frac{M}{\gamma RT} \omega^2}$.

c) On a $\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\text{grad } P$ soit ici $\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{k \rho c_s V_{HP}}{\sin(kL)} \sin(\omega t) \sin(kz - kL) \vec{e}_z$ en intégrant (on considère qu'en l'absence de son, l'air est immobile), on trouve :

$$\vec{v}(z,t) = -\frac{k c_s V_{HP}}{\omega \sin(kL)} \cos(\omega t) \sin(kz - kL) \vec{e}_z \text{ et comme } \frac{k c_s}{\omega} = 1 : \boxed{\vec{v}(z,t) = -\frac{V_{HP}}{\sin(kL)} \cos(\omega t) \sin(kz - kL) \vec{e}_z}$$

En $z = 0$, on trouve $\vec{v}(0,t) = -\frac{V_{HP}}{\sin(kL)} \cos(\omega t) \sin(-kL) \vec{e}_z = V_{HP} \cos(\omega t) \vec{e}_z$ soit $\boxed{\vec{v}(0,t) = \vec{v}_{HP}(t)}$. On retrouve bien le mouvement de la membrane.

En $z = L$, on trouve alors $\boxed{\vec{v}(L,t) = \vec{0}}$, ce qui est bien conforme au fait que le gazoduc est fermé en $z = L$.

Les conditions aux limites sont donc bien satisfaites.

III.B.2

a) En supposant que les forces de pression sont uniformes, la résultante des forces de pression subie par la membrane s'écrit :

$$\vec{f}_P = S \left(P_0 - \left(\frac{\rho c_s V_{HP}}{\tan(kL)} \sin(\omega t) + P_0 \right) \right) \vec{e}_z \text{ soit finalement : } \boxed{\vec{f}_P = -S \frac{\rho c_s V_{HP}}{\tan(kL)} \sin(\omega t) \vec{e}_z}.$$

b) La force de Laplace subie par la tige métallique vaut : $\boxed{\vec{f}_L = \int i(t) d\vec{l} \wedge \vec{B} = i(t) a B \vec{e}_z}$. On applique alors le principe fondamental de la dynamique (PFD) à la tige, dans le référentiel terrestre, supposé galiléen, en projection sur l'axe \vec{e}_z :

$$m \ddot{z}_{HP}(t) = -S \frac{\rho c_s V_{HP}}{\tan(kL)} \sin(\omega t) + i(t) a B - \lambda \dot{z}_{HP}(t) - k_e z_{HP}(t)$$

$$\boxed{m \ddot{z}_{HP}(t) + \lambda \dot{z}_{HP}(t) + k_e z_{HP}(t) = i(t) a B - S \frac{\rho c_s V_{HP}}{\tan(kL)} \sin(\omega t)} \quad (M)$$

c) Faisons le bilan des puissances engagées dans le circuit électrique :

$$P_{\text{générateur}} = P_{\text{Joule}} + P_{\text{inductance}} + P_{\text{Laplace}} \iff E(t) i(t) = R(i(t))^2 + L_b i(t) \frac{di(t)}{dt} + i(t) a B \dot{z}_{HP}(t)$$

En simplifiant par $i(t)$ qui n'est pas la fonction nulle, on obtient :

$$\boxed{L_b \frac{di(t)}{dt} + R i(t) = E(t) - a B \dot{z}_{HP}(t)} \quad (E)$$

d) On passe (E) en complexes, il vient : $(jL_b \omega + R) \underline{i} = \underline{E} - aB(j\omega) \underline{z}$. De même pour (M) :

$$(m(j\omega)^2 + \lambda(j\omega) + k_e) \underline{z} = aB \underline{i} - \frac{\rho c_s S}{\tan(\omega L/c_s)} (-j)(j\omega) \underline{z}$$

On remplace alors \underline{z} dans la première équation, et on obtient :

$$(jL_b \omega + R) \underline{i} = \underline{E} - aB(j\omega) \left(\frac{aB}{m(j\omega)^2 + \lambda j\omega + k_e - j \frac{\rho c_s S}{\tan(\omega L/c_s)} (j\omega)} \right) \underline{i}$$

$$\iff \left(jL_b \omega + R + \frac{B^2 a^2}{j\omega m + \frac{k_e}{j\omega} + \lambda - j \frac{\rho c_s S}{\tan(\omega L/c_s)}} \right) \underline{i} = \underline{E} \iff \boxed{Z = R + jL_b \omega + \frac{B^2 a^2}{j\omega m + \frac{k_e}{j\omega} + \lambda - j \frac{\rho c_s S}{\tan(\omega L/c_s)}}} \quad CQFD$$

e) On retrouve que $|\underline{Z}| \approx 0$ sauf pour les fréquences des modes propres. On a donc bien réalisé une cavité résonnante analogue à celle étudiée précédemment. Les fréquences des modes propres permet, connaissant c_s , de retrouver la longueur de la canalisation. En cas d'obstruction par un obstacle, cette longueur sera raccourcie, ce qui se traduira par une modification des fréquences relevées. Le relevé des fréquences des modes propres permet donc la détection d'obstacles ainsi –le cas échéant– que leur positionnement.

III.B.3

a) On a $|\underline{Z}| = \frac{E}{I}$. Le voltmètre en y_1 mesure directement la tension aux bornes du GBF, soit E . On peut appliquer le pont diviseur de tension aux bornes du haut-parleur : $y_2 = y_1 \frac{Z}{Z+R}$ donc, en faisant le rapport des tensions divisées par les deux voltmètres, on trouve : $\frac{y_2}{y_1} = \frac{|\underline{Z}|}{|R+\underline{Z}|} \approx \frac{|\underline{Z}|}{R}$ car $R \gg |\underline{Z}|$. On aura donc $\boxed{|\underline{Z}| \approx R \frac{y_2}{y_1}}$.

b) On remarque la présence des trois premiers modes propres, mais avec une atténuation : la réflexion n'est donc pas parfaite. En outre, les fréquences des deux derniers pics ne sont pas tout à fait des multiples de celle du premier. Le modèle n'est donc pas parfait. On a $\Delta f = \frac{c_s}{2L}$ ou encore $\boxed{L = \frac{c_s}{2\Delta f}}$. En travaillant avec les deux premiers pics, on trouve $L \approx 2,3 \text{ m}$, si l'on prend les deux derniers, on trouve $L \approx 2,1 \text{ m}$.

c) On retrouve bien la valeur attendue. Il semblerait que l'utilisation des deux derniers pics amène un résultat plus fiable.