Depuis son invention, le four à micro-ondes a immédiatement envahi les cuisines des particuliers. On s'intéresse ici à un modèle simplifié de son fonctionnement et de la protection de sa paroi.

Document 4 - Découverte du principe du four à micro-ondes

L'ingénieur Percy Spencer eut une drôle de surprise alors qu'il travaillait à la mise au point d'un radar en 1945 : sa barre de chocolat se mit à fondre à proximité d'un « magnétron » sous tension ! Un brevet suivit dans la foulée et le premier four à micro-ondes vit le jour deux ans plus tard...

D'après « La physique par les objets quotidiens » de Cédric Ray et Jean-Claude Poizat
Éditions Belin pour la science. Octobre 2007.

La fréquence des ondes utilisées dans un four à micro-ondes est généralement égale à 2,50 GHz.

Q35. Justifier, à l'aide d'un calcul, pourquoi les ondes utilisées dans le four à micro-ondes sont qualifiées d'ondes centimétriques.

Q36. Les fours à micro-ondes peuvent parfois perturber les liaisons Wi-Fi. Nommer le phénomène responsable de cette perturbation et déduire la fréquence des ondes Wi-Fi en justifiant la réponse.

Dans un modèle approché simplifié, on considérera le four à micro-ondes comme un parallélépipède rectangle d'arêtes parallèles aux axes Ox, Oy et Oz, Oz étant la verticale ascendante et de faces d'équations : $x = 0$ et $x = d$; $y = 0$ et $y = d'$; $z = 0$ et $z = d''$ (**figure 3**).

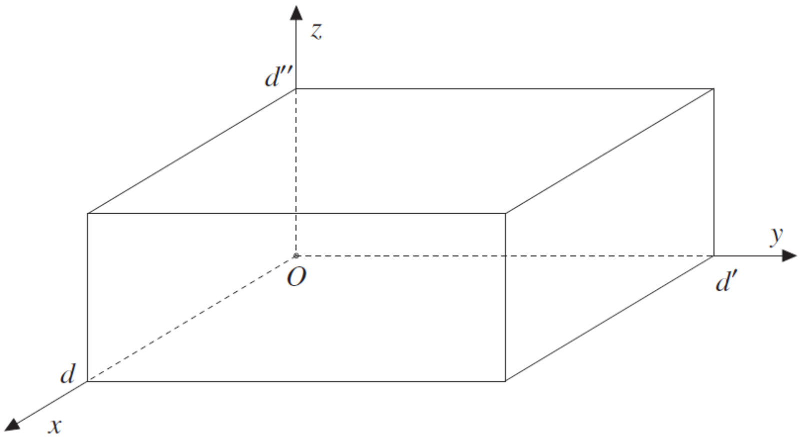

Figure 3 – Représentation schématique du four à micro-ondes

On mène une étude simplifiée de l'onde présente dans le four à micro-ondes. On admet que l'onde résultante à l'intérieur du four s'écrit sous la forme

$$\vec{E}(x, y, z, t) = E_0(x)\cos(\omega t - kz)\vec{u_y} \qquad (2)$$

où $E_0(x)$ n'est pas une constante mais dépend effectivement de x, ω est la pulsation de l'onde et k la norme du vecteur d'onde associé.

On suppose que le four est vide, c'est-à-dire sans aliment et donc rempli d'air, de caractéristiques assimilables avec une excellente approximation à celles du vide.

Q37. Écrire les quatre équations de Maxwell dans le vide, sans charge ni courant.

Q38. Montrer que l'équation de propagation relative au champ $\vec{E}$ est :

$$\Delta\vec{E} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}. \qquad (3)$$

Q39. À partir de l'équation (3), déterminer l'équation différentielle que doit nécessairement vérifier $E_0(x)$.

Q40. À quelle condition sur ω, k et c, la solution de cette équation est-elle oscillante ?
On admet pour la suite que cette condition est satisfaite.

On rappelle la relation de passage du champ électrique $\vec{E}$ à l'interface entre deux milieux différents indicés 1 et 2

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{1\to 2} \qquad (4)$$

avec σ la densité surfacique de charge au niveau de l'interface entre les deux milieux et $\vec{n}_{1\to 2}$ le vecteur unitaire directeur normal à la surface allant du milieu 1 au milieu 2.

On suppose que les parois du four à micro-ondes sont des parois épaisses constituées de conducteur parfait. On peut montrer que le champ électrique à l'intérieur d'un conducteur parfait est nul.

Q41. En déduire que le champ électrique total est nul au niveau des parois $x = 0$ et $x = d$.

Q42. Écrire les conditions aux limites que cela impose pour $E_0(x)$.

Q43. Montrer que cela entraîne

$$E_0(x) = A\sin\left(n\pi\frac{x}{d}\right)$$

avec A une constante qu'on ne déterminera pas et n un entier.
En déduire la relation de dispersion entre n, d, k et ω.

En réalité, le conducteur constituant la structure parallélépipédique du four à micro-ondes n'est pas un conducteur idéal. On peut montrer que cela induit alors que l'onde va légèrement pénétrer dans le conducteur sur une longueur caractéristique appelée profondeur de pénétration, notée δ. On l'appelle aussi épaisseur de peau et elle a pour expression

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma}} \qquad (5)$$

avec σ la conductivité du conducteur non parfait.

La structure est constituée d'aluminium, de conductivité finie $\sigma_{Al} = 2{,}0\cdot 10^7\ \mathrm{S\cdot m^{-1}}$. On note e l'épaisseur de la paroi d'aluminium. On peut également montrer que l'amplitude de l'onde est alors multipliée par un facteur $\exp\left(-\frac{e}{\delta}\right)$.

Q44. Déterminer numériquement l'épaisseur minimale e_{min} pour que l'amplitude de l'onde soit atténuée d'un facteur 10^4 permettant ainsi une bonne protection des personnes situées à proximité du four à micro-ondes. Commenter.

Q35. Nous avons la relation $\lambda = \dfrac{c}{f} = \dfrac{3 \cdot 10^8}{2,5 \cdot 10^9} = 12$ cm. La longueur d'onde de ces ondes est donc de l'ordre du centimètre d'où leur nom...

Q36. Le phénomène responsable de ces perturbations sont les interférences constructives ou destructives des ondes. Les ondes Wi-Fi sont donc d'une fréquence de 2,5 GHz.

Q37. Maxwell Gauss dans le vide : $\mathrm{div}\left(\overrightarrow{E}\right) = 0$, Maxwell Faraday : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{E}\right) = -\dfrac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$, Maxwell flux : $\mathrm{div}\left(\overrightarrow{B}\right) = 0$ et Maxwell Ampère dans le vide $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{B}\right) = \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$.

Q38. On applique le rotationnel à Maxwell Faraday ce qui conduit en utilisant les données à l'équation $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\left(\overrightarrow{E}\right)\right) - \overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{E} = -\mu_0\varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2}$. Nous obtenons finalement l'équation de D'Alembert demandée en utilisant le fait que $\mathrm{div}\left(\overrightarrow{E}\right) = 0$ dans le vide.

Q39. D'après l'énoncé $\overrightarrow{E}$ est uniquement dirigé par $\overrightarrow{u_y}$, ainsi l'équation (3) devient $\Delta E_y - \mu_0\varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0$.

Or $\Delta E_y = \dfrac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \left(\dfrac{\mathrm{d}^2 E_0}{\mathrm{d}x^2} - k^2 E_0\right)\cos(\omega t - kz)$ et $\dfrac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = -\omega^2 E_0 \cos(\omega t - kz)$.

Finalement nous obtenons l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}^2 E_0}{\mathrm{d}x^2} + \left(\dfrac{\omega^2}{c} - k^2\right) E_0 = 0$.

Q40. Pour avoir une solution oscillante il faut que $\dfrac{\omega^2}{c^2} > k^2$ afin que le terme devant E_0 soit positif ce qui imposera des racines du polynôme caractéristique complexes.

Q41. L'application de la relation de passage en $x = 0$ conduit à la relation $\overrightarrow{E}(x = 0, y, z, t) - 0 = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\overrightarrow{u_x}$. Or $\overrightarrow{E}$ est selon $\overrightarrow{u_y}$, ainsi par projection sur les trois axes nous obtenons $\sigma = 0$ et $E_0(x = 0)\cos(\omega t - kz) = 0$, d'où $E_0(0) = 0$.
De la même manière on montre en $x = d$ que $E_0(d) = 0$.

Q42. Voir question précédente.

Q43. D'après l'énoncé nous nous plaçons dans le cas où les solutions sont oscillantes, ainsi $E_0(x) = A\cos(k'x + \phi)$. Or à l'aide des conditions limites précédentes, nous avons $A\cos(\phi) = 0$ et $A\cos(k'd + \phi) = 0$.
La première relation impose $\phi = \pi/2$, d'où $E_0(x) = A\sin(k'x)$ et la seconde conduit alors à $0 = A\sin(k'd)$ de qui impose que $k'd = n\pi$ avec $n \in \mathbb{Z}$ d'où $k' = \dfrac{n\pi}{d}$. Nous obtenons donc finalement bien l'expression demandée.

Lorsque l'on injecte cette expression dans l'équation différentielle précédente nous obtenons alors la relation $n^2\dfrac{\pi^2}{d^2} = \dfrac{\omega^2}{c^2} - k^2$, d'où $k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - n^2\dfrac{\pi^2}{d^2}$.

Q44. On souhaite alors $10^{-4} = e^{-e_{min}/\delta}$, d'où $e_{min} = \delta \ln 10^4 = \sqrt{\dfrac{2}{\omega\mu_0\sigma}} \ln 10^4 = \sqrt{\dfrac{2}{2\pi \cdot 2,5 \cdot 10^9 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2,0 \cdot 10^7}} \ln 10^4 = \dfrac{1}{\sqrt{2}\pi 10^5} \ln 10^4 \approx 2 \cdot 10^{-5}$ m.
L'épaisseur usuelle des parois (de l'ordre du mm) est suffisante pour une bonne protection des personnes à proximité.