

Modèle du gaz parfait :

Tracer l'allure des diagrammes de Clapeyron $P(V)$ suivi un gaz parfait dans les situations suivantes :

	Isochore	Isobare	Isotherme	Adiabatique + mécaniquement réversible
Chauffage				
Refroidissement				
Compression				
Détente				

Différentielle totale exacte et forme différentielle :

Soit $f(x, y) = x^2 + 2xy$

- 1) Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$
- 2) Calculer $\frac{\partial f}{\partial y}$
- 3) Vérifier que $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$

Soit $d\psi = 2xydx + 4xydy$. Supposons que $\psi(x, y)$ existe :

- 1) Calculer $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)$
- 2) Calculer $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)$
- 3) Cette différentielle est associée à une unique fonction si $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)$. Est-ce le cas ?

Dérivée partielle

Soit une fonction $f(x, y) = 4xy + \ln(xy)$

- 1) Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$
- 2) Calculer $\frac{\partial f}{\partial y}$
- 3) Exprimer la différentielle df

Soit un gaz de n moles dont la fonction d'état est : $P(V - V_0) = nRT$ où V_0 est une constante, P la pression du gaz, T sa température et V son volume.

- 4) Exprimer la fonction $V(T, P)$. Interpréter quand $T = 0$
- 5) Exprimer la différentielle dV

Modèle du gaz parfait :

Pour un GP	Isochore	Isobare	Isotherme	Adiabatique
Chauffage : $T_{ext} > T + Q > 0$			NON	NON
Refroidissement : $T_{ext} < T + Q < 0$			NON	NON
Compression : $P_{ext} > P \rightarrow \Delta P > 0 + \Delta V < 0$	NON	NON		
Détente : $P_{ext} < P \rightarrow \Delta P < 0 + \Delta V > 0$	NON	NON		

Différentielle totale exacte et forme différentielle :

Soit $f(x, y) = x^2 + 2xy$

- 1) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2y$
- 2) $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x$
- 3) $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = 2$

Soit $d\psi = 2xydx + 4xydy$.

- 1) $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = 2$
- 2) $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = 4$
- 3) $d\psi$ est ici une forme différentielle et pas une différentielle totale exacte.

Dérivée partielle

Soit une fonction $f(x, y) = 4xy + \ln(xy)$

- 1) $\frac{\partial f}{\partial x} = 4y + \frac{1}{x}$
- 2) $\frac{\partial f}{\partial y} = 4x + \frac{1}{y}$
- 3) Exprimer la différentielle $df = \left(4y + \frac{1}{x} \right) dx + \left(4x + \frac{1}{y} \right) dy$

Soit un gaz de n moles dont la fonction d'état est : $P(V - V_0) = nRT$ où V_0 est une constante.

- 4) $V(T, P) = \frac{nRT}{P} + V_0$ où $\frac{nRT}{P}$ rend compte du volume propre des particules
- 5) $dV = \frac{nR}{P} dT - \frac{nRT}{P^2} dP$

Loi de Laplace et calcul différentiel

On donne la loi de Laplace $PV^\gamma = Cte$

- 1) Différentier la relation précédente
- 2) Exprimer $\frac{dP}{dV}$

Différentielle et dérivée partielle

On donne l'énergie interne d'un gaz réel :

$$U(T, V) = C_v T - \frac{n^2 a}{V} + U_0$$

C_v, a, n, U_0 sont des constantes.

- 1) Calculer $\frac{\partial U}{\partial T}$
- 2) Calculer $\frac{\partial U}{\partial V}$
- 3) En déduire la différentielle dU

Coefficient thermoélastique

Un vérin contient 2,0 L d'huile ($\chi_T = 5 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$). Quelle surpression faut-il pour réduire le volume de 0,5 % ?

Loi de Laplace et calcul différentiel

$$d(PV^\gamma) = V^\gamma dP + P dV^\gamma = V^\gamma dP + P \gamma V^{\gamma-1} dV = 0$$

$$\text{Donc } \frac{dP}{dV} = -\gamma \frac{PV^{\gamma-1}}{V^\gamma} = -\frac{\gamma P}{V}$$

Différentielle et dérivée partielle

$$\frac{\partial U}{\partial T} = C_v$$

$$\frac{\partial U}{\partial V} = \frac{n^2 a}{V^2}$$

$$dU = C_v dT + \frac{n^2 a}{V^2} dV$$

Coefficient thermoélastique

$$\chi_T = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P} = -\frac{1}{V_0} \frac{\Delta V}{\Delta P} \rightarrow \Delta P = -\chi_T^{-1} \frac{\Delta V}{V_0} = 100 \text{ bar}$$