

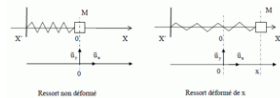
B31	niveau de maîtrise	poids compétence	note compétence	note globale
Savoir énoncer les résultats importants du cours	1	10	5,0	10,0
Connaître les hypothèses d'application des résultats	1			
Savoir appliquer directement son cours sur un exemple simple	1			
S'approprier : faire un schéma, identifier les grandeurs physiques et les hypothèses	1	6	3,0	
Analyser : adapter l'écriture des relations, théorèmes ou principes à la situation proposée	NE			
Réaliser :Savoir mener les calculs analytiques, numériques, résolutions d'équations	1			
Valider : Vérifier la pertinence du résultat obtenu (critique de la valeur et de sa dimension)	NE			
Communiquer à l'oral dans un langage courant, scientifique et approprié	1	4	2,0	
Rédiger proprement ses démarches au tableau	1			

	+	-		
ajustement	*		note	11

Remarques : Nous avons traité ensemble ce sujet, objectif la prochaine fois : faire la colle avec plus d'autonomie

Théorème d'Emmy Noether et lois de conservation

Le théorème d'Emmy Noether prédit que si le Lagrangien d'un système physique présente une invariance alors il existe une grandeur physique associée qui se conserve. Pour illustrer le théorème d'Emmy Noether, on va considérer un système masse-ressort horizontal étudié dans un référentiel Galiléen :



La masse m est repérée par sa position x par rapport au repos (ressort à sa longueur à vide). On note $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ sa vitesse et $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$ son accélération. Le ressort est de raideur k constante. Dans cet exercice nous supposons que la masse m est une fonction du temps.

- 1) Appliquer la 2^e loi de Newton et projeter cette équation suivant $\vec{u}_x$.
- 2) Donner l'expression de l'énergie cinétique $E_c(x, t)$ en fonction des données du problème.
- 3) Donner l'expression de l'énergie potentielle élastique $E_p(x)$ en fonction des données du problème. On prendra $E_p(0) = 0$.

On définit le lagrangien L par $L(x, \dot{x}, t) = E_c(x, t) - E_p(x)$

- 4) Exprimer $\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)_{x,t}$ en fonction de k et x .

- 5) Exprimer $\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)_{x,t}$ puis $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)_{x,t}$

- 6) En déduire que $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)_{x,t} = \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)_{x,t}$

Le résultat précédent peut aussi s'écrire en utilisant la quantité de mouvement $p = m\dot{x}$, ainsi $\frac{d}{dt}p = \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)_{x,t}$

Ce résultat se généralise à tout système : Si le lagrangien d'un système est invariant par translation dans l'espace $\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)_{x,t} = 0$ alors sa quantité de mouvement se conserve (on retrouve ici une autre formulation du principe d'inertie).

- 7) Donner l'expression de la différentielle dL en fonction des dérivées partielles de L .

- 8) En déduire que $\frac{d}{dt}\left(\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\dot{x} + \left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)_{x,\dot{x}}\right)$

- 9) En déduire alors que $\frac{dE_m}{dt} = -\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)_{x,\dot{x}}$

Ce résultat se généralise à tout système : si le lagrangien d'un système est invariant dans le temps $\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)_{x,\dot{x}} = 0$ alors son énergie mécanique associée est conservée (on retrouve ici une autre formulation du théorème de la puissance mécanique). On peut aussi démontrer que si le Lagrangien d'un système est isotrope alors son moment cinétique est conservé. Les lois de conservations (énergie, charge, ...) ne sont donc pas des postulats indépendants.

Dans ces conditions, on a :

- D'après la 2^e loi de Newton $\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$
- Expression de l'énergie cinétique : $E_c = \frac{1}{2}m(t)\dot{x}^2$
- Expression de l'énergie potentielle élastique : $E_p = \frac{1}{2}kx^2$
- Expression du lagrangien : $L(x, \dot{x}, t) = E_c(x, t) - E_p(x) = \frac{1}{2}m(t)\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$

On peut remarquer que $\frac{\partial L}{\partial x} = -kx$

Et que : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}m\dot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$

D'où : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x}$

On a alors $dL = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)_{x,t} d\dot{x} + \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)_{x,t} dx + \left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)_{x,\dot{x}} dt$

Et donc $\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{x} + \frac{\partial L}{\partial x}\dot{x} + \left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)_{x,\dot{x}}$

Or, nous avons vu que : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x}$

Donc $\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\dot{x} + \frac{\partial L}{\partial x}\dot{x} + \left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)_{x,\dot{x}}$

Les propriétés du calcul de dérivée permettent d'écrire $\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\dot{x}\right) + \left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)_{x,\dot{x}}$

Soit :

$$\frac{d}{dt}\left(\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\dot{x}\right) = \left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)_{x,\dot{x}}$$

$$\frac{d}{dt}(L - 2E_c) = -\frac{dE_m}{dt} = \left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)_{x,\dot{x}}$$

B32	niveau de maîtrise	poids compétence	note compétence	note globale
Savoir énoncer les résultats importants du cours	2	10	10,0	18,0
Connaître les hypothèses d'application des résultats	2			
Savoir appliquer directement son cours sur un exemple simple	2			
S'approprier : faire un schéma, identifier les grandeurs physiques et les hypothèses	NE	6	6,0	
Analyser : adapter l'écriture des relations, théorèmes ou principes à la situation proposée	NE			
Réaliser :Savoir mener les calculs analytiques, numériques, résolutions d'équations	2			
Valider : Vérifier la pertinence du résultat obtenu (critique de la valeur et de sa dimension)	NE			
Communiquer à l'oral dans un langage courant, scientifique et approprié	1	4	2,0	
Rédiger proprement ses démarches au tableau	1			

ajustement	+	-	note	17
		*		

Remarques : Bonne colle

Energie interne d'un gaz réel, dérivée partielle et différentielle

Soit la fonction énergie interne $U(T, V)$ et la fonction entropie $S(T, V)$ des variables T et V .

- 3) Donner les expressions des différentielles dU et dS en fonction des dérivées partielles $\frac{\partial U}{\partial T}, \frac{\partial U}{\partial V}, \frac{\partial S}{\partial T}, \frac{\partial S}{\partial V}$
- 4) On rappelle l'identité thermodynamique $dU = TdS - pdV$ et on note $C_v = \frac{\partial U}{\partial T}$. Montrer que $dU = C_v dT + \left(T \frac{\partial S}{\partial V} - p\right) dV$
- 5) On définit la fonction énergie libre $F = U - TS$. Exprimer la différentielle en utilisant l'identité thermodynamique
- 6) En déduire que $\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{\partial S}{\partial V}$.
- 7) Montrer que pour un GP, on a $dU = C_v dT$
- 8) Montrer que pour un gaz réel vérifiant $\left(P + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$ on a

$$dU = C_v dT + \frac{n^2 a}{V^2} dV$$

- 9) Montrer que l'énergie interne d'un gaz parfait est

$$U(T, V) = U_0 + C_v T - \frac{n^2 a}{V}$$

Energie interne d'un gaz réel, dérivée partielle et différentielle

$$dU(T, V) = \frac{\partial U}{\partial T} dT + \frac{\partial U}{\partial V} dV = C_v dT + \frac{\partial U}{\partial V} dV (1)$$

$$dS(T, V) = \frac{\partial S}{\partial T} dT + \frac{\partial S}{\partial V} dV (2)$$

$$\text{Or } dU = TdS - pdV (3)$$

Donc en mettant (2) dans (3) et par identification avec 1

$$dU = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} dT + \frac{\partial S}{\partial V} dV \right) - pdV$$

$$dU = C_v dT + \left(T \frac{\partial S}{\partial V} - p \right) dV (4)$$

$$\text{Or si on construit : } F(T, V) = U(T, V) - TS(T, V)$$

$$\text{Alors } dF = dU - TdS - SdT = -pdV - SdT$$

$$\text{Donc cette différentielle implique : } \frac{\partial F}{\partial T} = \frac{\partial S}{\partial V} (5)$$

$$\text{En mettant (5) dans (4) : } dU = C_v dT + \left(T \frac{\partial p}{\partial T} - p \right) dV (4')$$

$$\text{Pour GP : } T \frac{\partial p}{\partial T} = \frac{nRT}{V} = p \text{ et donc } dU = C_v dT$$

$$\text{Pour GR : } p = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{n^2 a}{V^2} \text{ donc } T \frac{\partial p}{\partial T} - p = \frac{n^2 a}{V^2}$$

$$dU = C_v dT + \frac{n^2 a}{V^2} dV$$

$$\text{Donc : } U(T, V) = C_v T + K(V) \text{ et } K'(V) = \frac{n^2 a}{V^2} \rightarrow K(V) = -\frac{n^2 a}{V} + Cte$$

$$U(T, V) = U_0 + C_v T - \frac{n^2 a}{V}$$

Nom :	Prénom:	colle du:	niveau de maîtrise	poids compétence	note compétence	note globale
Savoir énoncer les résultats importants du cours			1	10	3,3	5,5
Connaître les hypothèses d'application des résultats			1			
Savoir appliquer directement son cours sur un exemple simple			0			
S'approprier : faire un schéma, identifier les grandeurs physiques et les hypothèses			NE	6	0,0	
Analyser : adapter l'écriture des relations, théorèmes ou principes à la situation proposée			NE			
Réaliser :Savoir mener les calculs analytiques, numériques, résolutions d'équations			0			
Valider : Vérifier la pertinence du résultat obtenu (critique de la valeur et de sa dimension)			NE			
Communiquer à l'oral dans un langage courant, scientifique et approprié			1	4	2,0	
Rédiger proprement ses démarches au tableau			1			

ajustement	+	-	note	7
	*			

Remarques : colle assez confuse : dérivée, différentielle, dérivée partielle....il faut plus de précision

Energie interne et calcul différentiel

Une molécule complexe a une énergie interne molaire $U(T) \approx aT + bT^2$ (avec a, b > 0 constants, T en kelvins).

- Donner l'expression du différentiel dU.
- Pour un échauffement de T_1 à T_2 ($T_2 > T_1$), calculer $\Delta U = U(T_2) - U(T_1)$.
- Discuter l'unité de a et de b.

Dérivées partielles et différentielle

Soit $f(x, y) = x^2y + \exp(xy)$.

- Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.
- Écrire la différentielle totale exacte df

Loi de Laplace et calcul différentiel

On donne la loi de Laplace $PV^\gamma = Cte$

- Différencier la relation précédente
- Exprimer $\frac{dP}{dV}$

Energie interne et calcul différentiel

- $dU = (a + 2bT)dT$
- $\int_1^2 dU = \Delta U = \int_1^2 a dT + \int_1^2 2bT dT = a(T_2 - T_1) + b(T_2^2 - T_1^2)$
- $[a] = J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$ et $[b] = J \cdot K^{-2} \cdot mol^{-1}$

Dérivées partielles et différentielle

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + ye^{xy}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + xe^{xy}$$

$$df = (2xy + ye^{xy})dx + (x^2 + xe^{xy})dy$$

Loi de Laplace et calcul différentiel

$$d(PV^\gamma) = V^\gamma dP + P dV^\gamma = V^\gamma dP + P\gamma V^{\gamma-1} dV = 0$$

$$\text{Donc } \frac{dP}{dV} = -\gamma \frac{PV^{\gamma-1}}{V^\gamma} = -\frac{\gamma P}{V}$$