

Nom : Martin Prénom: Léon colle du: 7-10 mais faite le 17-10

	niveau de maîtrise	poids compétence	note compétence	note globale
Savoir énoncer les résultats importants du cours	0	10	3,3	8,5
Connaître les hypothèses d'application des résultats	1			
Savoir appliquer directement son cours sur un exemple simple	1			
S'approprier : faire un schéma, identifier les grandeurs physiques et les hypothèses	NE	6	3,0	
Analyser : adapter l'écriture des relations, théorèmes ou principes à la situation proposée	NE			
Réaliser :Savoir mener les calculs analytiques, numériques, résolutions d'équations	1			
Valider : Vérifier la pertinence du résultat obtenu (critique de la valeur et de sa dimension)	NE			
Communiquer à l'oral dans un langage courant, scientifique et approprié	1	4	2,0	
Rédiger proprement ses démarches au tableau	1			

	+	-		
ajustement		*	note	8

Remarques : avec beaucoup d'aide : on avance mais je note une très difficile restitution des connaissances de cours

Exercice 1

Le gradient est un opérateur vectoriel qui s'applique à des fonctions scalaires. Pour un système de coordonnées cartésiennes (x, y, z) décrivant l'espace, la définition du gradient d'une fonction f(x, y, z) est :

$$\vec{\text{grad}}(f) = \vec{\nabla}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$

On considère la fonction V(x, y, z) = xyz. Quelle est la bonne expression du gradient de V ?

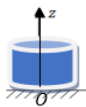
Exercice 2 :

Développer les expressions suivantes :

- a)  $\vec{\text{grad}}\left(xy + yz + zx + \frac{xyz}{a}\right) \dots\dots\dots$
- b)  $\vec{\text{grad}}(3x^2 + 2a(y-z) + b^2) \dots\dots\dots$

Exercice 1 : Question de cours

On considère un réservoir d'eau de hauteur H. Donner l'expression de la pression P(z) en référentiel terrestre galiléen (le champ de pesanteur est considéré uniforme et vertical). On utilisera le repérage ci-contre (origine au niveau du sol) et une pression atmosphérique P<sub>0</sub>.



Exercice 1 :

1 Calculons les trois composantes du vecteur gradient dans le système de coordonnées cartésiennes (x, y, z).

$$\frac{\partial V}{\partial x} = yz, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = xz \quad \text{et} \quad \frac{\partial V}{\partial z} = xy.$$

Exercice 2 :

1.2 a) Posons f(x, y, z) = xy + yz + zx +  $\frac{xyz}{a}$ . Calculons les dérivées partielles : on a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + z + \frac{yz}{a}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x + z + \frac{xz}{a} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = y + x + \frac{xy}{a}$$

Donc le vecteur gradient de f s'écrit  $\left(z + y + \frac{yz}{a}\right)\vec{e}_x + \left(x + y + \frac{xz}{a}\right)\vec{e}_y + \left(x + y + \frac{xy}{a}\right)\vec{e}_z$ .  
La réponse attendue est bien un vecteur !

1.2 b) Posons f(x, y, z) = 3x<sup>2</sup> + 2a(y - z) + b<sup>2</sup>. Calculons les dérivées partielles : on a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2a \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -2a.$$

Donc le vecteur gradient de f s'écrit 6x $\vec{e}_x$  + 2a $\vec{e}_y$  - 2a $\vec{e}_z$ .

Exercice 1 : Question de cours

Avec la loi de la statique des fluides et un axe ascendant :  $\frac{dP(z)}{dz} = -\rho g$

Soit P(z) =  $\rho g(H - z) + P_0$

Exercice 2 : statique des fluides

Nom : Verger Elyot      Prénom:      colle du:	niveau de maîtrise	poids compétence	note compétence	note globale
Savoir énoncer les résultats importants du cours	1	10	5,0	13,0
Connaître les hypothèses d'application des résultats	1			
Savoir appliquer directement son cours sur un exemple simple	1			
S'approprier : faire un schéma, identifier les grandeurs physiques et les hypothèses	NE	6	6,0	
Analyser : adapter l'écriture des relations, théorèmes ou principes à la situation proposée	NE			
Réaliser : Savoir mener les calculs analytiques, numériques, résolutions d'équations	2			
Valider : Vérifier la pertinence du résultat obtenu (critique de la valeur et de sa dimension)	NE			
Communiquer à l'oral dans un langage courant, scientifique et approprié	1	4	2,0	
Rédiger proprement ses démarches au tableau	1			

	+	-		
ajustement			note	13

Remarques : du mieux pour cette colle

**Exercice 1.5** - Valeurs et projections d'un gradient. ●●●●

On munit l'espace d'un repère cartésien dont le système de coordonnées est noté  $(x, y, z)$ .  
On donne l'expression de l'opérateur gradient dans ce système de coordonnées :

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} e_1 + \frac{\partial f}{\partial y} e_2 + \frac{\partial f}{\partial z} e_3$$

On considère la fonction  $g(x, y, z) = (x - 2)^2 + (y + 1)^2 + z^2 - 1$ , on note  $M(x, y, z)$  un point quelconque de l'espace et A le point de coordonnées  $(-1, 1, 2)$ .

a) Calculez  $g(A)$  .....

b) La quantité  $2z$  correspond à :  
  $\nabla g(A) \cdot e_3$       $\nabla g(A) \cdot e_1$       $\nabla g(A) \cdot e_2$   
  $\nabla g(A) \cdot e_1$       $\nabla g(A) \cdot e_2$       $\nabla g(A) \cdot e_3$

c) La quantité  $2y + 2$  correspond à :  
  $\nabla g(A) \cdot e_1$       $\nabla g(A) \cdot e_2$       $\nabla g(A) \cdot e_3$

d) La quantité  $2x - 4$  correspond à :  
  $\nabla g(A) \cdot e_1$       $\nabla g(A) \cdot e_2$       $\nabla g(A) \cdot e_3$

e) La quantité  $\nabla g(M)$  correspond au vecteur :  
  $\begin{pmatrix} 2(x-2) \\ 2(y+1) \\ 2z \end{pmatrix}$       $\begin{pmatrix} 2(y-1) \\ 2(x+2) \\ 2z \end{pmatrix}$       $\begin{pmatrix} 2(x-2) \\ 2(y+1) \\ 2z \end{pmatrix}$

f) Calculez  $\|\nabla g(A)\|$  .....

**Exercice 1.6** - Enquête sur une fonction. ●●●●

On considère une fonction  $f(x, y, z)$  inconnue telle que  $\nabla f(x, y, z) = 2xy e_1 + x^2 e_2 + a^2 e_3$ .

a) Quelle est l'unique relation valable ?  
  $\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} = 2xy$       $\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} = x^2$       $\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} = y$

b) Quelle primitive est solution de la réponse précédente ?  
  $f(x, y, z) = x^2 y + g(x, z)$       $f(x, y, z) = x^2 y + yz^2$   
  $f(x, y, z) = x^2 y + g(x, z)$       $f(x, y, z) = x^2 y + g(x, z)$

c) Que vérifie la dérivée partielle par rapport à  $z$  de la réponse précédente ?  
  $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$       $\frac{\partial g}{\partial y} = x^2$       $\frac{\partial g}{\partial y} = 1$

d) En s'appuyant sur les réponses précédentes, quelle est la bonne expression de  $g$  ?  
  $g = a^2 y + Cste$       $g = a^2 z + Cste$       $g = a^2 + Cste$

e) Quelle est l'expression de la fonction  $f(x, y, z)$  telle que  $f(0, 0, 0) = 0$  ?  
  $f = x^2 y + a^2 z$       $f = x^2 z + a^2 y$       $f = x^2 z + a^2 y$

**1.5.a)** On a  $g(A) = g(-1, 1, 2) = (-1 - 2)^2 + (1 + 1)^2 + 2^2 - 1 = 9 + 4 + 4 - 1 = 16$ .

**1.5.b)** Exprimez le gradient de la fonction scalaire  $g$ . On a  
 $\nabla g(x, y, z) = \frac{\partial g}{\partial x} e_1 + \frac{\partial g}{\partial y} e_2 + \frac{\partial g}{\partial z} e_3 = 2(x - 2)e_1 + 2(y + 1)e_2 + 2ze_3$   
 Par projection sur l'axe de direction  $e_3$  on obtient la quantité  $2z$ . Réponse

**1.5.c)** Exprimez le gradient de la fonction scalaire  $g$ . On a  
 $\nabla g(x, y, z) = \frac{\partial g}{\partial x} e_1 + \frac{\partial g}{\partial y} e_2 + \frac{\partial g}{\partial z} e_3 = 2(x - 2)e_1 + 2(y + 1)e_2 + 2ze_3$   
 Par projection sur l'axe de direction  $e_2$  on obtient la quantité  $2y + 2$ . Réponse

**1.5.d)** Exprimez le gradient de la fonction scalaire  $g$ . On a  
 $\nabla g(x, y, z) = \frac{\partial g}{\partial x} e_1 + \frac{\partial g}{\partial y} e_2 + \frac{\partial g}{\partial z} e_3 = 2(x - 2)e_1 + 2(y + 1)e_2 + 2ze_3$   
 Par projection sur l'axe de direction  $e_1$  on obtient la quantité  $2x - 4$ . Réponse

**1.5.e)** Exprimez le gradient de la fonction scalaire  $g$ . On a  
 $\nabla g(x, y, z) = \frac{\partial g}{\partial x} e_1 + \frac{\partial g}{\partial y} e_2 + \frac{\partial g}{\partial z} e_3 = 2(x - 2)e_1 + 2(y + 1)e_2 + 2ze_3$   
 Cette notation est équivalente au vecteur colonne de la réponse

**1.5.f)** Calculons les composantes du gradient d'après les réponses précédentes, on peut exprimer la norme du vecteur gradient  $\|\nabla g(x, y, z)\|$  en un point quelconque. On a  
 $\|\nabla g(x, y, z)\| = \sqrt{(2x - 4)^2 + (2y + 2)^2 + 4z^2}$   
 On réalise l'application numérique au point  $A(-1, 1, 2)$  on a  
 $\|\nabla g(A)\| = \|\nabla g(-1, 1, 2)\| = \sqrt{(-2 - 4)^2 + (2 + 2)^2 + 4 \times 2^2} = \sqrt{36 + 16 + 16} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$

**1.6.a)** Répétons l'expression du gradient en coordonnées cartésiennes : on a  
 $\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} e_1 + \frac{\partial f}{\partial y} e_2 + \frac{\partial f}{\partial z} e_3$   
 On sait que  $\nabla f = 2xy e_1 + x^2 e_2 + a^2 e_3$ , donc par identification:  $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2$  et  $\frac{\partial f}{\partial z} = a^2$ . Réponse

**1.6.b)** On a  $\frac{\partial f}{\partial z} = a^2$  donc par intégration par rapport à la variable  $z$  il vient  $f(x, y, z) = x^2 y + Cste$  avec  $Cste = g(x, z)$  une fonction des coordonnées  $x$  et  $z$  car  $\frac{\partial g(x, z)}{\partial y} = 0$ . Réponse

**1.6.c)** On a  $f(x, y, z) = x^2 y + g(x, z)$  donc  $\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} = x^2 + \frac{\partial g(x, z)}{\partial y}$ . Or, d'après l'énoncé, on a  
 $\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} = x^2$   
 On déduit de ces deux équations que l'on a nécessairement  $\frac{\partial g(x, z)}{\partial y} = 0$ . Réponse

**1.6.d)** On a  $\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} = 0$  donc par intégration par rapport à la variable  $y$  il vient  $g(x, z) = h(z)$  une fonction de la seule coordonnée  $z$  car  $\frac{\partial h(z)}{\partial x} = 0$ .  
 On a  $f(x, y, z) = x^2 y + g(x, z) = x^2 y + h(z)$  donc  $\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} = 2xy + \frac{\partial h(z)}{\partial x} = 2xy$ . On sait d'après l'énoncé que  $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy$ .  
 On déduit de ces deux équations que l'on a nécessairement  $\frac{\partial h(z)}{\partial x} = 0$  donc  $h(z) = a^2 z + Cste$  soit finalement  $g = a^2 z + Cste$ . Réponse

**1.6.e)** On a  $f(x, y, z) = x^2 y + g(x, z) = x^2 y + a^2 z + Cste$ . On a donc  $f(0, 0, 0) = Cste$ , or  $f(0, 0, 0) = 0$  donc  $Cste = 0$ . Réponse

Nom : Giraud      Prénom: Aubin      colle du: 09-09	niveau de maîtrise	poids compétence	note compétence	note globale
Savoir énoncer les résultats importants du cours	1	10	3,3	8,5
Connaître les hypothèses d'application des résultats	1			
Savoir appliquer directement son cours sur un exemple simple	0			
S'approprier : faire un schéma, identifier les grandeurs physiques et les hypothèses	NE	6	3,0	
Analyser : adapter l'écriture des relations, théorèmes ou principes à la situation proposée	NE			
Réaliser :Savoir mener les calculs analytiques, numériques, résolutions d'équations	1			
Valider : Vérifier la pertinence du résultat obtenu (critique de la valeur et de sa dimension)	NE	4	2,0	
Communiquer à l'oral dans un langage courant, scientifique et approprié	1			
Rédiger proprement ses démarches au tableau	1			

	+	-		
ajustement		*	note	8

**Remarques :cela manque de recul, cela manque d'approfondissement, cela manque de travail**

Exercice 1 : Gradient

- Soit une fonction  $f(x, y, z)$ , une fonction de l'espace en repérage cartésien
- Donner l'expression de la différentielle  $df$  de  $f$  en fonction de ses dérivées partielles
  - Exprimer  $df$  en fonction de  $\overrightarrow{\text{grad}}f$ .
  - En déduire l'expression de l'opérateur gradient en repérage cartésien.
  - Reprendre les questions précédentes en repérage sphérique

Exercice 2 : Gradient

On rappelle la définition de l'opérateur gradient appliqué à une fonction scalaire  $f(M)$  :

$$df = \overrightarrow{\text{grad}}f \cdot d\overrightarrow{OM}$$

- Calculer le gradient de  $f(x) = ax + b$  avec  $a$  et  $b$  constants
- Représenter quelques lignes de champ de  $\overrightarrow{\text{grad}}f$
- Identifier les surfaces pour lesquelles  $f$  est constant.

Exercice 3 : Gradient

- Rappeler le lien entre le travail d'une force conservative  $\vec{F}_c$  et son énergie potentielle  $E_p(M)$ .
- Montrer que  $\vec{F}_c = -\overrightarrow{\text{grad}}E_p$
- Soit un objet de masse  $m$  dans le champ de pesanteur terrestre  $\vec{g}$  uniforme. Déterminer l'expression de l'énergie potentielle  $E_{pp}$  de pesanteur en utilisant l'opérateur gradient
- Soit un objet de masse  $m$  dans le champ gravitationnel non uniforme de la Terre :  $\vec{G}(M) = -G \frac{M_T}{r^2} \vec{u}_r$  où  $G$  est la constante gravitationnelle,  $r$  la distance entre la masse  $m$  et le centre de la Terre et  $M_T$  la masse de la Terre. Déterminer l'énergie potentielle associée à la force gravitationnelle.

Exercice 1 :

La variation locale (ou élémentaire) est donnée par :  $df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z} dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y} dz$

On va écrire ce résultat sous la forme d'un produit scalaire :  $df = \overrightarrow{\text{grad}}f \cdot d\overrightarrow{OM}$

En base cartésienne :	En base cylindrique	Base sphérique
$\overrightarrow{\text{grad}}f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{\text{grad}}f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{\text{grad}}f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \end{pmatrix}$

Exercice 2 : Gradient

On rappelle la définition de l'opérateur gradient appliquée à une fonction scalaire  $f(M)$  :

$$df = \overrightarrow{\text{grad}}f \cdot d\overrightarrow{OM}$$

- $\overrightarrow{\text{grad}}f = a\vec{u}_x$
- Champ uniforme
- Plans perpendiculaires à  $\vec{u}_x$

Exercice 3 :

- $dE_p = -\delta W = -\vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM}$
- $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}E_p$
- $E_{pp} = \pm mgz + Cte$
- $E_p = -\frac{GMm}{r}$