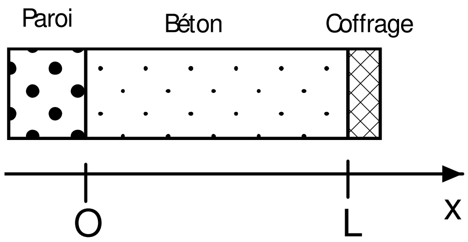
CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Thermodynamique

On réalise le dispositif suivant pour s'assurer de la prise d'un béton :



La paroi est maintenue à température constante T_0.
Le coffrage subit un arrosage permanent ce qui fixe sa température à T_e ($T_e < T_0$). La prise en masse du béton est exothermique et libère une puissance volumique $P_{vol} > 0$ uniforme. L'étude est faite en régime stationnaire et le problème est unidirectionnel.
Données : On note l'épaisseur de béton e ; sa largeur est l ; sa conductivité λ

1) Effectuer un bilan enthalpique local du béton
2) Donner l'expression de la température $T(x)$ dans le béton en fonction des constantes du problème.
3) Pourquoi la prise du béton sera favorisée si sa température ne descend pas en dessous de T_e ?
4) Quelle est la condition portant sur $T_0 - T_e$ assurant un flux unidirectionnel ?

Physique 1 : Planche 9

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Thermodynamique

Faisons un bilan de flux sur une tranche de longueur dx, de largeur l et d'épaisseur e

$$-\lambda\left(\frac{dT}{dx}\right)_x le = -\lambda\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x+dx} le + P_{vol} ledx$$

$$\left(\frac{d^2T}{dx^2}\right) - \frac{P_{vol}}{\lambda} = 0$$

Donc $\left(\frac{dT}{dx}\right) = \frac{P_{vol}}{\lambda}x + k_1$ Et $T(x) = \frac{P_{vol}}{2\lambda}x^2 + k_1 x + k_2$

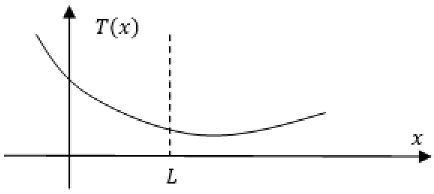
On utilise les conditions aux limites :

$T(x=0) = T_0$ et $T(x=L) = T_e$

Donc : $k_2 = T_0$ et $T_e = \frac{P_{vol}}{2\lambda}L^2 + k_1 L + T_0$ soit $k_1 = -\frac{P_{vol}}{2\lambda}L + \frac{T_e - T_0}{L}$

D'où : $T(x) = -\frac{P_{vol}}{2\lambda}(Lx + x^2) + \frac{T_e - T_0}{L}x + T_0$

On veut : $T(x) = -\frac{P_{vol}}{2\lambda}(Lx + x^2) + \frac{T_e - T_0}{L}x + T_0 > T_e$



Cette fonction est un polynôme présentant éventuellement un minimum lorsque la dérivée première s'annule soit : $\frac{P_{vol}}{\lambda}x_{min} + k_1 = 0$

$x_{min} = -\frac{\lambda k_1}{P_{vol}} > L$ Avec $k_1 = -\frac{P_{vol}}{2\lambda}L + \frac{T_e - T_0}{L}$

$$x_{min} = \frac{L}{2} - \frac{\lambda}{P_{vol}}\frac{T_e - T_0}{L} > L$$

Soit $T_0 - T_e > \frac{L^2 P_{vol}}{2\lambda}$