

Exercice : Gradient

Soit une fonction $f(x, y, z)$, une fonction de l'espace en repérage cartésien

- 1) Donner l'expression de la différentielle df de f en fonction de ses dérivées partielles
- 2) Exprimer df en fonction de $\overrightarrow{\text{grad}} f$.
- 3) En déduire l'expression de l'opérateur gradient en repérage cartésien.
- 4) Reprendre les questions précédentes en repérage sphérique

Exercice : Gradient

On rappelle la définition de l'opérateur gradient appliqué à une fonction scalaire $f(M)$:

$$df = \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot d\overrightarrow{OM}$$

- 1) Calculer le gradient de $f(x) = ax + b$ avec a et b constants
- 2) Représenter quelques lignes de champ de $\overrightarrow{\text{grad}} f$
- 3) Identifier les surfaces pour lesquelles f est constant.

Exercice : Gradient

- 1) Rappeler le lien entre le travail d'une force conservative $\overrightarrow{F}_c$ et son énergie potentielle $E_p(M)$.
- 2) Montrer que $\overrightarrow{F}_c = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p$
- 3) Soit un objet de masse m dans le champ de pesanteur terrestre $\vec{g}$ uniforme. Déterminer l'expression de l'énergie potentielle E_{pp} de pesanteur en utilisant l'opérateur gradient
- 4) Soit un objet de masse m dans le champ gravitationnel non uniforme de la Terre : $\vec{G}(M) = -G \frac{M_t}{r^2} \vec{u}_r$ où G est la constante gravitationnelle, r la distance entre la masse m et le centre de la Terre et M_t la masse de la Terre. Déterminer l'énergie potentielle associée à la force gravitationnelle.

Exercice : Gradient

La variation locale (ou élémentaire) est donnée par : $df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z} dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y} dz$

On va écrire ce résultat sous la forme d'un produit scalaire : $df = \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot d\overrightarrow{OM}$

En base cartésienne :	En base cylindrique	Base sphérique
$\overrightarrow{\text{grad}} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{\text{grad}} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{\text{grad}} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \\ \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \end{pmatrix}$

Exercice : Gradient

On rappelle la définition de l'opérateur gradient appliquée à une fonction scalaire $f(M)$:

$$df = \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot d\overrightarrow{OM}$$

- 1) $\overrightarrow{\text{grad}} f = a \vec{u}_x$
- 2) Champ uniforme
- 3) Plans perpendiculaires à $\vec{u}_x$

Exercice : Gradient

- 1) $dE_p = -\delta W = -\vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM}$
- 2) $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p$
- 3) $E_{pp} = \pm mgz + Cte$
- 4) $E_p = -\frac{GMm}{r}$

Exercice : opérateur gradient

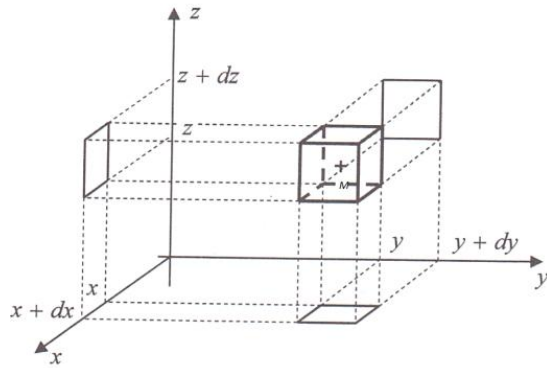
On rappelle la définition de l'opérateur gradient appliqué à une fonction scalaire $f(M)$:

$$df = \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot d\overrightarrow{OM}$$

- 1) Calculer le gradient de $P(z) = -\rho g z + P_0$ avec ρ, g et P_0 constants
- 2) Représenter quelques lignes de champ de $\overrightarrow{\text{grad}} P$
- 3) Identifier les surfaces pour lesquelles P est constant

Exercice : Question de cours :

On considère un élément de volume dV de fluide au repos dans un référentiel Galiléen lié à une base cartésienne représentée ci-dessous.



- 1) Montrer que le bilan de force pressante (volumique) $d\overrightarrow{f}_v$ s'exerçant sur dV est $d\overrightarrow{f}_v = -\overrightarrow{\text{grad}} P dV$
- 2) Etablir alors la loi de la statique des fluides dans le champ de pesanteur terrestre $\vec{g}$.

Exercice : opérateur gradient

- 1) Soit $f(x, y, z) = xyz$, calculer $\overrightarrow{\text{grad}} f$
- 2) Idem pour $f(x, y, z) = xy + yz + zx + \frac{xyz}{a}$
- 3) Idem pour $f(x, y, z) = 3x^2 + 2a(x - z) + b^2$

Exercice : Question de cours :

- Le bilan des forces de pression suivant $\overrightarrow{u}_x$ est :
- $d\overrightarrow{F}_v \cdot \overrightarrow{u}_x = (P(x, y, z) - P(x + dx, y, z)) dy dz = -\frac{\partial P}{\partial x} dV$
- $d\overrightarrow{F}_v = -\left(\frac{\partial P}{\partial x} \overrightarrow{u}_x + \frac{\partial P}{\partial y} \overrightarrow{u}_y + \frac{\partial P}{\partial z} \overrightarrow{u}_z\right) dV$
- Soit $\vec{g}$ le champ de pesanteur (terrestre), $\rho(M)$ la masse volumique du fluide au point M , alors un volume élémentaire statique c'est-à-dire en équilibre avec son poids vérifie :
- $\rho(M) \vec{g} = \overrightarrow{\text{grad}} P(M)$

Exercice :

- 1) $\overrightarrow{\text{grad}} f = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$
- 2) $\overrightarrow{\text{grad}} f = \begin{pmatrix} y + z + \frac{yz}{a} \\ x + y + \frac{xz}{a} \\ x + y + \frac{yz}{a} \end{pmatrix}$
- 3) $\overrightarrow{\text{grad}} f = \begin{pmatrix} 6x \\ 0 \\ -2a \end{pmatrix}$

Exercice : gradient

On considère un cylindre métallique dont le champ des températures est le suivant :

$$T(r, z) = T_0 + ar^2 + bz$$

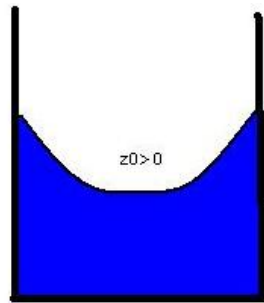
Calculer le gradient de T en repérage cylindrique

Exercice gradient :

Soit un fluide compressible au repos dont la masse volumique vérifie $\rho(z) = \rho_0(1 + \beta z)$ avec un axe verticale descendant. Donner l'expression de $P(z)$

Exercice gradient :

On considère un b cher en rotation :



On montre alors la pression dans le verre est alors donnée par :

$$\overrightarrow{grad}P = \begin{pmatrix} \rho\omega^2r \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

Trouver $P(r, z)$ en repérage cylindrique

Exercice : gradient

$$\overrightarrow{grad}f = \begin{pmatrix} 2ar \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$$

Exercice : gradient

$$\overrightarrow{grad}P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho_0(1 + \beta z)g \end{pmatrix}$$

$$P(z) = P_0 + \rho_0\left(z + \frac{\beta z^2}{2}\right)g$$

Exercice : gradient

$$P(r, z) = \frac{\rho\omega^2r^2}{2} + Cte(z) = \frac{\rho\omega^2r^2}{2} - gz + P_0$$

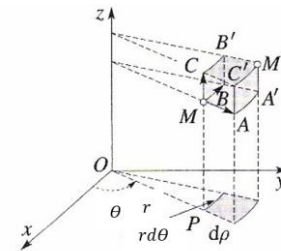
Question de cours

- Placer, dans la base cartésienne, le point $A(2; 2; 2\sqrt{2})$.
- Quel est le jeu de variables (r, θ, z) décrivant la position du point A dans la base cylindrique ? Représenter la base cylindroplaire associée à cette position du point A .
- Quel est le jeu de variables (r, θ, φ) décrivant la position du point A dans la base sphérique ? Représenter la base sphérique associée à cette position du point A

Exercice 1 : Repérage :

- Dessiner la base cylindrique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ en un point $M(r, \theta, z)$
- Déterminer la surface latérale S d'un cylindre de rayon R et de hauteur h .
- Déterminer la masse m du cylindre précédent si sa masse volumique $\rho(r) = \frac{\rho_0 r}{R}$
 ρ_0 et R sont des constantes.
- Déterminer le moment d'inertie J d'une sphère homogène de masse volumique ρ autour de son axe Oz . On rappelle que $I = \int HM^2 dm$ où HM est la distance radiale du point M avec l'axe Oz . On donne $\int \sin^3 \theta = \int (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta = -\int (1 - \cos^2 \theta) d\cos \theta$

Exercice 1 Repérage :



1)

$$2) S = 2\pi R h$$

$$3) m = \frac{2\pi\rho_0 h}{3} R^2$$

$$4) I = \int HM^2 dm = \rho \int r^4 \sin^3 \theta d\theta d\varphi dr = 2\pi\rho \frac{R^5}{5} \frac{4}{3}$$

$$I = 2m \frac{R^2}{5}$$