

Colle

Exercice 1 : Repérage :

- 1) Dessiner la base cylindrique ($\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z$) en un point $M(r, \theta, z)$
- 2) Déterminer la surface latérale S d'un cylindre de rayon R et de hauteur h .
- 3) Déterminer la masse m du cylindre précédent si sa masse volumique $\rho(r) = \frac{\rho_0 r}{R} \rho_0$ et R sont des constantes.
- 4) Déterminer le moment d'inertie J d'une sphère homogène de masse volumique ρ autour de son axe Oz . On rappelle que $J = \int HM^2 dm$ où HM est la distance radiale du point M avec l'axe Oz . On donne $\int \sin^3 \theta = \int (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta = -\int (1 - \cos^2 \theta) d\cos \theta$

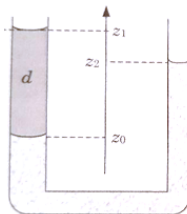
Exercice 2 : pression au centre du soleil

On assimile le soleil à un fluide statique, incompressible de masse volumique ρ occupant une sphère de rayon R . Dans cette sphère, le champ de pesanteur est radial est vaut $\vec{g} = -\frac{g_0 r}{R} \vec{u}_r$ où g_0 est une constante.

Déterminer l'expression de la pression dans le soleil. On note $P(r = R) = 0$.

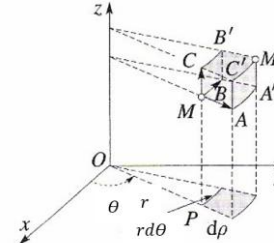
Exercice 3 : Liquides non miscibles

Pour mesurer la densité d d'une huile de pétrole, on verse de l'eau dans un tube en U à deux branches verticales de sections S_1 et $S_2 < S_1$. On verse ensuite très lentement de l'huile de pétrole dans la branche 1. Puis on mesure les côtes verticales z_2 du ménisque de l'eau dans la branche 2, z_1 de l'huile et z_0 de l'interface. On note ρ_0 la masse volumique de l'eau.



Donner l'expression de d

Exercice 1 Repérage :



1)

$$2) S = 2\pi R h$$

$$3) m = \frac{2\pi \rho_0 h}{3} R^2$$

$$4) I = \int HM^2 dm = \rho \int r^4 \sin^3 \theta d\theta d\varphi dr = 2\pi \rho \frac{R^5}{5} \frac{4}{3}$$

$$I = 2m \frac{R^2}{5}$$

Exercice 2 : pression au centre du soleil

D'après la loi de la statique des fluides : $\frac{dP}{dr} = -\rho \frac{g_0 r}{R}$

Donc : $P(r) = \rho \frac{g_0}{2R} (R^2 - r^2)$ (au centre, on trouve 1Gbar !)

Exercice 3 : Liquides non miscibles

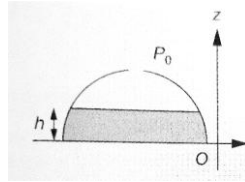
Pour cette situation statique, on a :

$$\begin{cases} P(z_0) = P_0 + \rho g(z_1 - z_0) \\ P(z_0) = P_0 + \rho_e g(z_2 - z_0) \end{cases}$$

$$\text{Donc } d = \frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} < 1$$

Exercice : Soulèvement d'une calotte sphérique

Une demi-sphère de rayon R , de masse m posée sur le sol est percée d'un trou en son sommet. On l'a rempli progressivement d'eau. Pour quelle hauteur h d'eau se soulève-t-elle ?

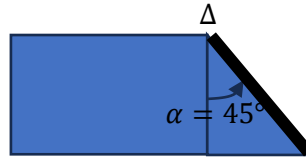


Exercice : question ouverte

Un glaçon flotte dans un verre d'eau rempli à ras bord. Quand le glaçon fond, le verre déborde-t-il ?

Exercice : Déclenchement d'un clapet

Une conduite se termine sur un clapet de masse m susceptible de tourner autour d'un axe Δ . Cette conduite carrée de largeur L contient de l'eau de masse volumique ρ sur une hauteur L . Quelle est la condition sur L assurant la mise en rotation du clapet ?



Exercice : Soulèvement d'une calotte sphérique

$$P(z) = P_0 + \rho_f g(h - z) \rightarrow P_{nette} = \rho_f g(h - z)$$

$$F_z = 2\pi R^2 \rho_f g \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} (h - z) \sin\theta \cos\theta d\theta = 2\pi R^2 \rho_f g \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} (h - R \cos\theta) \sin\theta \cos\theta d\theta$$

$$F_z = 2\pi R^2 \rho_f g \int_{h/R}^0 (-h \cos\theta d\cos\theta + R \cos^2\theta d\cos\theta)$$

$$F_z = 2\pi R^2 \rho_f g \left(\frac{h^3}{2R^2} - \frac{h^3}{3R^2} \right) = \frac{\pi h^3 \rho_f g}{3} \rightarrow \frac{\pi h^3 \rho_f g}{3} = mg$$

Exercice : question ouverte

$$\text{Avant la fonte : } V_{verre} = V_{eau,ini} + V_{glace,im} = V_{eau,ini} + \frac{\rho_g V_{glace}}{\rho_l} = V_{eau,ini} + \frac{m_g}{\rho_l}$$

$$\text{Après la fonte : } V_{verre} = V_{eau,ini} + V_{glace \rightarrow eau} = V_{eau,ini} + \frac{m_g}{\rho_l}$$

C'est donc le même volume !

Exercice : Déclenchement d'un clapet

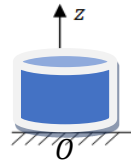
En prenant, une origine sur la surface libre :

$$P(z) = P_0 + \rho_f g z \rightarrow P_{nette} = \rho_f g z \text{ et } \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{z}{x}$$

$$M = L \int x P(x) dx = 2L \int_0^L z P(z) dz = 2 \frac{\rho_f g L^4}{3} \rightarrow 2 \frac{\rho_f g L^4}{3} = \frac{mgL\sqrt{2}}{2}$$

Exercice : Question de cours

On considère un réservoir d'eau de hauteur H . Donner l'expression de la pression $P(z)$ en référentiel terrestre galiléen (le champ de pesanteur est considéré uniforme et vertical). On utilisera le repérage ci-contre (origine au niveau du sol) et une pression atmosphérique P_0 .



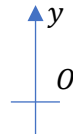
Exercice : Résultante des forces de pression :

Déterminer la résultante des forces de pression s'exerçant sur une moitié de cylindre de longueur l et de rayon R

Exercice 2 : statique des fluides

On donne la relation de la statique des fluides en référentiel terrestre Galiléen (avec P la pression, ρ la masse volumique du fluide et $\vec{g}$ le champ de pesanteur terrestre) :

$$\overrightarrow{\text{grad}P} = \rho \vec{g}$$



On travaille avec une base verticale ascendant $(O, \vec{u}_y)$

- 1) Obtenir l'expression de la fonction $P(y)$ si le fluide est incompressible et que $P(H) = P_0$.

Le fluide est maintenant un gaz supposé parfait de masse molaire M à la température T_0

- 2) Donner l'expression de sa masse volumique ρ en fonction de P, M, R (cte des GP), T_0
- 3) En déduire alors que $\frac{dP}{dy} + \frac{P}{\delta} = 0$ avec δ à exprimer
- 4) Résoudre cette équation si $P(0) = P_0$

Exercice : Question de cours

Avec la loi de la statique des fluides et un axe ascendant : $\frac{dP(z)}{dz} = -\rho g$

Soit $P(z) = \rho g(H - z) + P_0$

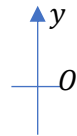
Exercice : Résultante des forces de pression :

$$F = \iint P_0 \cos\theta R d\theta dz = P_0 2Rh$$

Exercice 2 : statique des fluides

On donne la relation de la statique des fluides en référentiel terrestre Galiléen (avec P la pression, ρ la masse volumique du fluide et $\vec{g}$ le champ de pesanteur terrestre) :

$$\overrightarrow{\text{grad}P} = \rho \vec{g}$$

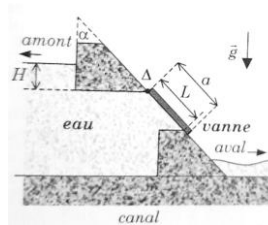
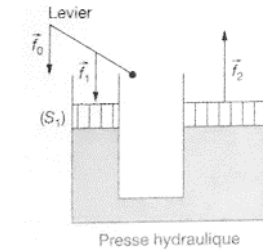


On travaille avec une base verticale ascendant $(O, \vec{u}_y)$

- 1) $P(y) = -\rho g(z - H) + P_0$
- 2) $\rho = \frac{PM}{RT}$
- 3) En déduire alors que $\frac{dP}{dy} = -\frac{PMg}{RT_0}$
- 4) $P(y) = P_0 e^{-\frac{y}{\delta}}$

Exercice 1 : questions ouvertes

- 1) Un tonneau est percé de manière à être surmonté par une fine colonne d'eau. On ajoute un peu d'eau dans la colonne, que va-t-il se passer ?
- 2) A la surface d'un récipient contenant de l'eau, la pression change de P_0 à $P_0 + \Delta P$. Que dire du changement de pression dans l'eau ?
- 3) Un récipient contenant de l'eau possède deux ouvertures de sections très différentes $S_2 \gg S_1$ fermées par des pistons. Que se passe-t-il si on applique une force $\vec{f}_1$ sur le piston de surface S_1 .



Exercice 2 : Barrage

Pour maintenir en eau un canal d'irrigation, pour cela, on érige un petit mur de béton en guide barrage, dont la face aval est inclinée d'un angle α par rapport à la verticale, et on y aménage un petit tunnel refermé par une vanne carrée, de longueur utile L et de largeur utile l . La surface libre de l'eau en amont du barrage est à une hauteur H au-dessus de partie supérieure de la vanne. Donner l'expression de la résultante de la force pressante s'exerçant sur la vanne.

Exercice 3 : Lignes de champ

On peut tracer des lignes de champ sur python, pour cela on décrit le champ des vitesses dans un repérage cartésien $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$.

Décrire, dans la base cartésienne, le champ des vitesses suivant décrit en polaire : $\vec{v} = r \vec{u}_\theta$

Exercice 1 : questions ouvertes

- 1) La force pressante s'exerçant sur le tonneau est donnée par $P_{moy} S_{tonneau} \propto h$ où h est la hauteur de liquide dans le capillaire (cette force n'est pas fonction de la section droite du capillaire)
- 2) Pour un fluide incompressible et avec une axe vertical ascendant $\overrightarrow{grad}P = \rho \vec{g} \rightarrow P(z) = -\rho g z + P(z=0) \rightarrow P(z=0) - P(z) = \rho g z$. Cette dernière égalité implique qu'à $z = cte$, la différence de pression avec la surface libre est constante : toute surpression en surface est retranscrite en profondeur.
- 3) La surpression $\frac{f_1}{S_1}$ est intégralement transmise en S_2 , on a $\frac{f_1}{S_1} = \frac{f_2}{S_2}$ donc si $\frac{S_2}{S_1} \gg 1$ alors $\frac{f_2}{f_1} \gg 1$: d'où une amplification de la force f_1 .

Exercice 2 : Barrage

La pression « nette » au niveau de la vanne est $P_{nette} = \rho g z$ en prenant un axe vertical descendant. La force pressante, normale à la plaque est donnée par $F = l \int \rho g z dr$ avec $z = H + \cos \alpha r$

$$F = l \int \rho g z dr = l \rho g \int_0^L (H + \cos(\alpha) r) dr$$

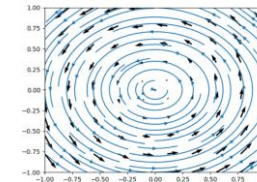
$$F = l \rho g \left(HL + \frac{\cos(\alpha) L^2}{2} \right)$$

On peut calculer le moment résultat $M_\Delta = l \rho g \int_0^L (Hr + \cos(\alpha) r^2) dr$

$$M_\Delta = l \rho g \left(\frac{HL^2}{2} + \frac{\cos(\alpha) L^3}{3} \right)$$

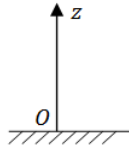
Exercice 3 : Lignes de champ

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}_r \\ \vec{u}_\theta \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}_x \\ \vec{u}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}_x \\ \vec{u}_y \end{pmatrix}$$



Exercice : Application du cours

On considère l'atmosphère terrestre comme un gaz parfait (de température $T(z) = T_0 - az$ avec a constante et de masse molaire M). Montrer que l'expression de la pression $P(z)$ en référentiel terrestre galiléen (le champ de pesanteur est considéré uniforme et vertical) vérifie $\frac{P(z)}{P_0} = \left(\frac{T(z)}{T_0}\right)^\alpha$ avec α constante. On utilisera le repérage ci-contre et une pression au niveau du sol donnée par P_0 .



Exercice : compressibilité de l'eau (*)

On rappelle :

- Dans toute la suite, on va supposer les océans comme des volumes isothermes à la température T_0 . La masse volumique de l'eau dépendant uniquement de la profondeur z .
 - P_0 est la pression atmosphérique
 - Le coefficient de compressibilité isotherme de l'eau $\chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_{T=T_0} \approx 5 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$ est supposé uniforme.
- 1) Montrer que $\chi_T = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dP}$.
 - 2) A $T = T_0$, on note $\rho(z=0) = \rho_0$. Montrer que $\rho(z) = \rho_0 e^{\chi_T(P-P_0)}$
 - 3) En déduire l'expression de $P(z)$
 - 4) En déduire que $\rho(z) = \frac{\rho_0}{(1 - \rho_0 g \chi_T z)}$
 - 5) En déduire la variation relative de la masse volumique au fond d'un océan de 10km de profondeur :

Exercice : statique des fluides

D'après la loi de la statique des fluides : $\frac{dP}{dz} = -\rho g = -\frac{PMg}{R(T_0 - az)}$

Et donc : $\frac{dP}{P} = d \ln P = \frac{Mg}{Ra} \frac{-adz}{(T_0 - az)} = \frac{Mg}{Ra} d \ln(T_0 - az)$

Donc : $d \ln P = d \ln(T_0 - az) \frac{Mg}{Ra}$

Soit : $d \ln \frac{P}{(T_0 - az) \frac{Mg}{Ra}} = 0$

Et : $\frac{P(z)}{(T_0 - az) \frac{Mg}{Ra}} = \frac{P_0}{T_0 \frac{Mg}{Ra}}$

Donc : $\frac{P(z)}{P_0} = \left(\frac{T(z)}{T_0} \right) \frac{Mg}{Ra}$

Exercice :

On peut définir le volume massique $v = \frac{V}{m}$. Ainsi : $\chi_T = -\frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial P} = -\frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial P}$

$\rho = \frac{1}{v}$ donc pour une masse de fluide donnée $dv = -\frac{1}{\rho^2} d\rho$ Donc : $\chi_T = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P}$

Il s'agit d'intégrer en fonction de P : $\frac{d\rho}{\rho} = d \ln(\rho) = \chi_T dP \rightarrow \ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) = \chi_T(P - P_0) \rightarrow \rho(z) = \rho_0 e^{\chi_T(P-P_0)}$

On a donc $\frac{dP}{dz} = \rho_0 g e^{\chi_T(P-P_0)}$

$$\frac{dP(z)}{e^{\chi_T(P-P_0)}} = \rho_0 g dz$$

$$P(z) = P_0 - \frac{\ln(1 - \rho_0 g \chi_T z)}{\chi_T}$$

$$\frac{dP}{dz} = \rho(z)g = \frac{\rho_0 g}{(1 - \rho_0 g \chi_T z)} \rightarrow \rho(z) = \frac{\rho_0}{(1 - \rho_0 g \chi_T z)} = \rho_0 (1 - \rho_0 g \chi_T z)^{-1}$$

Proposons un DL à l'ordre 1 : $\rho(z) \approx \rho_0 (1 + \rho_0 g \chi_T z)$ donc $\frac{\Delta \rho}{\rho_0} = \rho_0 g \chi_T z = 5 \times 10^{-2} = 5\%$

Exercice : fluide accéléré

Une cuve rectangulaire, remplie d'un liquide homogène de densité ρ_0 , est soumise à une accélération horizontale constante a_0 suivant les x croissants.

1. Montrer que les surfaces isobares sont planes et inclinées.
2. Donner l'expression de la pression en fonction de x et z

Exercice : Force pressante

Un fluide remplit un canal de section circulaire de rayon R , de longueur L sur un angle θ_0 seulement (paroi partielle remplie). Déterminer la résultante des forces exercées sur la portion de paroi immergée.

Exercice : Loi de la statique

Dans un champ gravitationnel radial $g(r) = -\frac{GM}{r^2}$, exprimer la variation de la pression $P(r)$ dans un fluide incompressible de densité ρ_0 . On prendra

Exercice : fluide accéléré

$$\rho \vec{a} dV = -\overrightarrow{\text{grad}P} dV + \rho \vec{g} dV$$

$$\overrightarrow{\text{grad}P} = \rho(\vec{g} - \vec{a})$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial z} \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} -a_0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}, \text{ comme l'opérateur gradient est perpendiculaire aux isobares,}$$

on en déduit que les surfaces isobares sont inclinées

$$P(x, z) = -\rho(gz + a_0x) + P_0$$

$$\text{Equation de la surface libre } z = -\frac{a_0}{g}x$$

Exercice : Force pressante

La résultante verticale est : $dF = \rho g R^2 \cos^2 \theta d\theta L = \frac{\rho g R^2 L}{2} (\cos 2\theta - 1) d\theta$

$$F = \frac{\rho g R^2 L}{2} \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta_0 - \theta_0 \right)$$

Exercice : Loi de la statique

$$\overrightarrow{\text{grad}P} = -\rho_0 \frac{GM}{r^2} \vec{u}_r$$

$$P(r) = P_0 + \rho_0 \frac{GM}{r} - \rho_0 \frac{GM}{r_0}$$