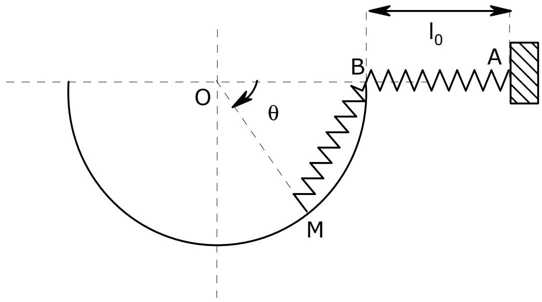
CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mécanique

Un point matériel M de masse m étudié dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen est solidaire d'une rigole circulaire (de centre O et de rayon a) sur laquelle il peut glisser sans frottement.

Il est fixé en un point B du plan horizontal par l'intermédiaire d'un ressort élastique de raideur k et de longueur à vide l_0. Le bord de la rigole est à la distance l_0 du point A.

1) Déterminer l'expression de l'énergie potentielle de la masse m en fonction du paramètre θ.
2) En déduire la position d'équilibre θ_{eq} en fonction de m, g, k et a.
3) Utiliser la conservation de l'énergie mécanique pour en déterminer l'équation différentielle vérifiée par θ lorsque M est en mouvement. En déduire la période des petites oscillations autour de la position d'équilibre.



CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

1) L'énergie potentielle élastique est donnée par :
$\frac{1}{2}k(l-l_0)^2 = \frac{1}{2}k(BM)^2$ avec $(BM)^2 = (asin\theta)^2 + (a - acos\theta)^2 = 2a^2(1-cos\theta) = a^2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$
et l'énergie potentielle de pesanteur (axe ascendant) $-mgasin\theta$
Donc l'énergie potentielle totale est : $E_p = k\left(a^2(1-cos\theta)\right) - mgasin\theta$

2) Les positions d'équilibre vérifient :

$$\left(\frac{dE_p}{d\theta}\right)_{\theta_{eq}} = ka^2sin\theta_{eq} - mgacos\theta_{eq} = 0$$

Soit $tan\theta_{eq} = \frac{mg}{ka} > 0$ et donc comme $0 \leq \theta \leq \pi$ alors $0 \leq \theta_{eq} \leq \frac{\pi}{2}$

3) L'énergie mécanique totale est donné par :

$$E_m = \frac{ma^2\dot{\theta}^2}{2} + k\left(a^2(1-cos\theta)\right) - mgasin\theta$$

En utilisant le théorème de la puissance mécanique :

$$ma^2\ddot{\theta} + ka^2sin\theta - mgacos\theta = 0$$

Proposons un DL autour de la position d'équilibre :

$$\theta \approx \theta_{eq} + \varepsilon$$
$$sin\theta \approx sin\theta_{eq} + \varepsilon cos\theta_{eq}$$

Et $cos\theta \approx cos\theta_{eq} - \varepsilon sin\theta_{eq}$

$$ma^2\ddot{\varepsilon} + ka^2\left(sin\theta_{eq} + \varepsilon cos\theta_{eq}\right) - mga\left(cos\theta_{eq} - \varepsilon sin\theta_{eq}\right) = 0$$

Soit :

$$ma^2\ddot{\varepsilon} + \varepsilon\left(ka^2cos\theta_{eq} + mgasin\theta_{eq}\right) = 0$$
$$ma^2\ddot{\varepsilon} + \varepsilon\left(\frac{1}{tan^2\theta_{eq}} + 1\right)mgasin\theta_{eq} = 0$$
$$\ddot{\varepsilon} + \frac{g}{asin\theta_{eq}}\varepsilon = 0$$