CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Electromagnétisme

Un conducteur occupant le demi-espace infini $x > 0$ est caractérisé par une distribution de charge de densité volumique $\rho(x) = \rho_0 \exp\left(-\frac{x}{a}\right)$, alors que le demi-espace $x < 0$ est vide (ρ =0). La surface de séparation est le plan yOz ; a est une distance très petite par rapport aux dimensions du problème de l'ordre de la dizaine de nm.

1) Justifier la direction du vecteur champ électrique en tout point de l'espace ; de quelle(s) variable(s) dépend sa norme ?
2) Déterminer son expression E pour x > 0 et x < 0 en admettant :
   - que le milieu lui impose d'être nul lorsque x > 0 tend vers l'infini.
   - la continuité du champ électrique en x=0 pour cette distribution volumique
3) En déduire l'expression du potentiel $V(x)$ en tout point M de l'espace en fixant $V(x = 0) = 0$.
4) Tracer sur des graphes séparés les courbes de variation de $E(x)$ et de $V(x)$.
5) Comment se déforment ces courbes lorsque $a \to 0$ en supposant que le produit $\rho_0 a$ reste constant (refaire les graphes) ?
6) Montrer que le système est alors équivalent à un modèle de répartition surfacique dans le plan $x = 0$ avec une densité surfacique σ à déterminer.
7) On reprend la modèle volumique. Quelle est la force électrique dF_s à laquelle est soumis un élément de volume $d\tau$ entourant un point M du demi-espace $x > 0$? En déduire la résultante des forces F_s qui s'exerce sur un tube de section S et de longueur infinie depuis x = 0 jusqu'à x→∞ ; quel est sa direction et son sens ?
8) Que représente la quantité $\frac{|F_S|}{S}$ et vers quelle limite tend cette valeur lorsque $a \to 0$, le produit $\rho_0 a$ restant constant ? Exprimer le résultat obtenu en fonction de ε_0 et E(0), valeur du champ électrique au voisinage de la surface $x = 0$. Commentaire.

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Corrigé

On a, d'après les invariances et les symétries : $\vec{E} = E(x)\overrightarrow{u_x}$

x < 0	x > 0
$E = -a\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}$	$E = -a\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\exp(-\frac{x}{a})$
$V = a\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}x$	$V = a^2\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(1 - \exp(-\frac{x}{a})\right)$

On se rapproche d'une distribution surfacique $\rho_0 a = \sigma$ car on peut écrire :

x < 0	x > 0
$E = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$	$E = 0$
$V = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}x$	$V = 0$

On obtient l'équivalent d'une force pressante : on parle de pression électrostatique

$$\overrightarrow{F_s} = -\int_0^\infty a\frac{{\rho_0}^2}{\varepsilon_0}\exp(-2\frac{x}{a}))Sdx\overrightarrow{u_x} = -\frac{\mathrm{a}^2{\rho_0}^2}{2\varepsilon_0}S\overrightarrow{u_x}$$

$\frac{F_s}{S} = \frac{\mathrm{a}^2{\rho_0}^2}{2\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_0 E^2(0)}{2}$ soit la densité d'énergie volumique (analogue à une pression qui plaque les charges en surface et explique la charge surfacique des conducteurs)