

Exercice 1 – Décharge d'un condensateur (ordre 1, second membre nul)

Un condensateur de capacité $C=10\text{ }\mu\text{F}$ est chargé à $U_0 = 5.0\text{ V}$ puis relié à une résistance $R = 2.0\text{ k}\Omega$.

- 1) Obtenir l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur.
- 2) Résoudre cette équation

Exercice 2 – Chauffage d'un solide (ordre 1, second membre constant)

Un solide de masse m de capacité thermique massique m échange une puissance thermique avec l'extérieur donnée par $P = -k(T - T_{ext})$

- 1) Donner l'équation différentielle vérifiée par la température T de ce solide
- 2) Résoudre cette équation si $T(0) = T_0 < T_{ext}$

Exercice 3 – Cuve polluée (ordre 1, second membre constant, CI non nulle)

Une cuve contient un volume V constant en eau initialement pure. Un débit volumique D alimente cette cuve avec un polluant à la concentration C_0 . On note $C(t)$ la concentration supposée homogène du polluant dans la cuve. Une sortie assure un débit sortant D .

- 1) Donner l'équation différentielle vérifiée par $C(t)$
- 2) Exprimer $C(t)$

Exercice 4 – Oscillations sans frottement (ordre 2, second membre nul)

On considère un système masse-ressort $\{k; m\}$ horizontal évoluant sans frottement suivant l'axe x .

- 1) Donner l'équation différentielle
- 2) Résoudre cette équation si $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = 0$

Exercice 3:

$$dn(t) = DdtC_0 - DdtC$$

$$\text{Donc } \frac{dn}{dt} = D(C_0 - C)$$

$$V \frac{dC}{dt} = D(C_0 - C)$$

Soit :

$$\frac{dC}{dt} + \frac{D}{V}C = \frac{DC_0}{V}$$

Exercice 1 :

On suppose les quantités n_0, n_1, j_0 et p constantes. Résoudre les équations aux dérivées partielles suivantes :

- $\frac{\partial^2 n(x,t)}{\partial x^2} = 0$ avec $\begin{cases} n(0,t) = n_0 \\ \frac{\partial n}{\partial x}(0,t) = j_0 \end{cases}$
- $\frac{\partial^2 n(x,t)}{\partial x^2} = 0$ avec $\begin{cases} n(0,t) = n_0 \\ n(L,t) = j_0 \end{cases}$
- $\frac{\partial^2 n(x,t)}{\partial x^2} = p$ avec $\begin{cases} n(0,t) = n_0 \\ n(L,t) = n_0 \end{cases}$

Exercice 2 :

On suppose les quantités n_0, n_c, τ et p constantes. Résoudre les équations aux dérivées partielles suivantes :

- $\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = \frac{n}{\tau}$ avec $n(x,0) = n_0$
- $\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = \frac{n^2}{n_c \tau}$ avec $n(x,0) = n_0$
- $\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = -\frac{n}{\tau + p}$ avec $n(x,0) = n_0 \left(1 - \frac{x}{L}\right)$

12.5 a) $n(x,t) = j_0 x + n_0$

12.5 b) $n(x,t) = \frac{n_1 - n_0}{L} x + n_0$

12.5 c) $\frac{p}{2} x(x-L) + n_0$

12.6 a) $n(x,t) = n_0 \exp\left(\frac{t}{\tau}\right)$

12.6 b) $n(t) = \frac{n_0}{1 + \frac{n_0 t}{n_c \tau}}$

12.6 c) $n_0 \left(1 - \frac{x}{L}\right) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + p\tau \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$

Exercice 1 : Equation différentielle

- Résoudre $\frac{ds(t)}{dt} + \frac{s(t)}{\tau} = 0$ si $s(0) = s_0 > 0$ et τ constante
- Résoudre $\frac{ds(t)}{dt} + \frac{s(t)}{\tau} = \frac{E}{\tau}$ si $s(0) = s_0 < E$ et τ constante

Exercice 2 : équation différentielle

Résoudre analytiquement l'équation vérifiée par $x(t)$: $\ddot{x} + 2M\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = 0$ avec M, ω_0 constantes :

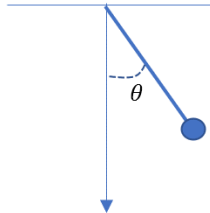
- Si $M = 0$ et $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = 0$
- Si $M = 1$ et $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = 0$
- Si $M < 1$ et $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = 0$

Exercice 3 : Equation non linéaire

On considère un pendule de longueur l dans le champ de pesanteur terrestre g et repéré par l'angle $\theta(t)$. On démontre que $\theta(t)$ vérifie l'équation différentielle non linéaire suivante :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$$

Avec $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$. Résoudre numériquement cette équation en utilisant un schéma d'Euler semi-implicite avec $\vec{y} = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{pmatrix}$ tel que $\frac{d\vec{y}}{dt} = \vec{f}(\vec{y}, t)$. Chaque échantillon est associé à un triplet $(t_i = iT_e, \theta_i, \dot{\theta}_i)$ avec T_e la période d'échantillonnage



Exercice 1 :

$$s(t) = s_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

$$s(t) = (s_0 - E) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + E$$

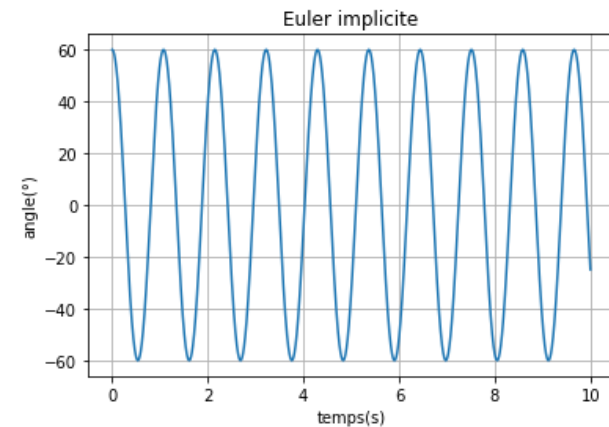
Exercice 2 : équation différentielle

- $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$ pour $M = 0$
- $x(t) = x_0(1 - \omega_0 t)e^{-\omega_0 t}$
- $x(t) = x_0 e^{-M\omega_0 t} \left(\cos(\omega_a t) + \frac{M}{\sqrt{1-M^2}} \sin(\omega_a t) \right)$

Exercice 3 : équation différentielle

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta}_i \\ \ddot{\theta}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\theta_{i+1} - \theta_i)/T_e \\ -\omega_0^2 \sin \theta_{i+1} \end{pmatrix}.$$

$$\text{D'où : } \begin{pmatrix} \theta_{i+1} = \theta_i + T_e \dot{\theta}_i \\ \dot{\theta}_{i+1} = \dot{\theta}_i - T_e \omega_0^2 \sin(\theta_{i+1}) \end{pmatrix}$$



Exercice : resolution numérique d'une équation diff d'ordre 1

- 1) Résolution
- 2) Erreur
- 3) Minimization de l'erreur stabilité

1. Schéma. $(T_{n+1} = T_n - \Delta t, k, (T_n - T_{\infty})).$

2. Script Python.

```
import numpy as np
```

```
k = 0.1      # s-1
```

```
T_ext = 20.0 # °C
```

```
T0 = 90.0    # °C
```

```
dt = 1.0     # s
```

```
t_max = 600  # s
```

```
N = int(t_max/dt)
```

```
t = np.linspace(0, t_max, N+1)
```

```
T = np.zeros(N+1)
```

```
T[0] = T0
```

```
for n in range(N):
```

```
    T[n+1] = T[n] - dt * k * (T[n] - T_ext)
```

```
T_exact = T_ext + (T0 - T_ext)*np.exp(-k*t)
```

```
err_max = np.max(np.abs(T - T_exact))
```

```
print(f"Erreur max ~ {err_max:.3e} °C")
```

3. Erreur. Schéma d'ordre 1 : erreur globale $O(\Delta t)$.

4. Stabilité pratique. Pour $(y = -y)$ et Euler expl., il faut $(0 < \Delta t < 2/k)$. Ici $(=k)$, donc $(\Delta t < 2/k)$.