

### Exercice 1 – Décharge d'un condensateur (ordre 1, second membre nul)

Un condensateur de capacité  $C=10\text{ }\mu\text{F}$  est chargé à  $U_0 = 5.0\text{ V}$  puis relié à une résistance  $R = 2.0\text{ k}\Omega$ .

- 1) Obtenir l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur.
- 2) Résoudre cette équation

### Exercice 2 – Chauffage d'un solide (ordre 1, second membre constant)

Un solide de masse  $m$  de capacité thermique massique  $m$  échange une puissance thermique avec l'extérieur donnée par  $P = -k(T - T_{ext})$

- 1) Donner l'équation différentielle vérifiée par la température  $T$  de ce solide
- 2) Résoudre cette équation si  $T(0) = T_0 < T_{ext}$

### Exercice 3 – Cuve polluée (ordre 1, second membre constant, CI non nulle)

Une cuve contient un volume  $V$  constant en eau initialement pure. Un débit volumique  $D$  alimente cette cuve avec un polluant à la concentration  $C_0$ . On note  $C(t)$  la concentration supposée homogène du polluant dans la cuve. Une sortie assure un débit sortant  $D$ .

- 1) Donner l'équation différentielle vérifiée par  $C(t)$
- 2) Exprimer  $C(t)$

### Exercice 4 – Oscillations sans frottement (ordre 2, second membre nul)

On considère un système masse-ressort  $\{k; m\}$  horizontal évoluant sans frottement suivant l'axe  $x$ .

- 1) Donner l'équation différentielle
- 2) Résoudre cette équation si  $x(0) = x_0$  et  $\dot{x}(0) = 0$

Exercice 3:

$$dn(t) = DdtC_0 - DdtC$$

$$\text{Donc } \frac{dn}{dt} = D(C_0 - C)$$

$$V \frac{dC}{dt} = D(C_0 - C)$$

Soit :

$$\frac{dC}{dt} + \frac{D}{V}C = \frac{DC_0}{V}$$

Exercice 1 :

On suppose les quantités  $n_0, n_1, j_0$  et  $p$  constantes. Résoudre les équations aux dérivées partielles suivantes :

- $\frac{\partial^2 n(x,t)}{\partial x^2} = 0$  avec  $\begin{cases} n(0,t) = n_0 \\ \frac{\partial n}{\partial x}(0,t) = j_0 \end{cases}$
- $\frac{\partial^2 n(x,t)}{\partial x^2} = 0$  avec  $\begin{cases} n(0,t) = n_0 \\ n(L,t) = j_0 \end{cases}$
- $\frac{\partial^2 n(x,t)}{\partial x^2} = p$  avec  $\begin{cases} n(0,t) = n_0 \\ n(L,t) = n_0 \end{cases}$

Exercice 2 :

On suppose les quantités  $n_0, n_c, \tau$  et  $p$  constantes. Résoudre les équations aux dérivées partielles suivantes :

- $\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = \frac{n}{\tau}$  avec  $n(x,0) = n_0$
- $\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = \frac{n^2}{n_c \tau}$  avec  $n(x,0) = n_0$
- $\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = -\frac{n}{\tau+p}$  avec  $n(x,0) = n_0 \left(1 - \frac{x}{L}\right)$

12.5 a) .....  $n(x,t) = j_0 x + n_0$

12.5 b) .....  $n(x,t) = \frac{n_1 - n_0}{L} x + n_0$

12.5 c) .....  $\frac{p}{2} x(x-L) + n_0$

12.6 a) .....  $n(x,t) = n_0 \exp\left(\frac{t}{\tau}\right)$

12.6 b) .....  $n(t) = \frac{n_0}{1 + \frac{n_0 t}{n_c \tau}}$

12.6 c) .....  $n_0 \left(1 - \frac{x}{L}\right) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + p\tau \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$

### Exercice 1 : Equation différentielle

- Résoudre  $\frac{ds(t)}{dt} + \frac{s(t)}{\tau} = 0$  si  $s(0) = s_0 > 0$  et  $\tau$  constante
- Résoudre  $\frac{ds(t)}{dt} + \frac{s(t)}{\tau} = \frac{E}{\tau}$  si  $s(0) = s_0 < E$  et  $\tau$  constante

### Exercice 2 : équation différentielle

Résoudre analytiquement l'équation vérifiée par  $x(t)$  :  $\ddot{x} +$

$2M\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = 0$  avec  $M, \omega_0$  constantes :

- Si  $M = 0$  et  $x(0) = x_0$  et  $\dot{x}(0) = 0$
- Si  $M = 1$  et  $x(0) = x_0$  et  $\dot{x}(0) = 0$
- Si  $M < 1$  et  $x(0) = x_0$  et  $\dot{x}(0) = 0$

### Exercice 3 : Equation non linéaire

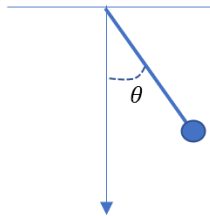
On considère un pendule de longueur  $l$  dans le champ de pesanteur terrestre  $g$  et repéré par l'angle  $\theta(t)$ . On démontre que  $\theta(t)$  vérifie l'équation différentielle non linéaire suivante :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$$

Avec  $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$ . Résoudre numériquement cette équation en utilisant

un schéma d'Euler semi-implicite avec  $\vec{y} = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{pmatrix}$  tel que  $\frac{d\vec{y}}{dt} =$

$\vec{f}(\vec{y}, t)$ . Chaque échantillon est associé à un triplet  $(t_i = iT_e, \theta_i, \dot{\theta}_i)$  avec  $T_e$  la période d'échantillonnage



Exercice 1 :

$$s(t) = s_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

$$s(t) = (s_0 - E) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + E$$

### Exercice 2 : équation différentielle

- $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$  pour  $M = 0$
- $x(t) = x_0(1 - \omega_0 t)e^{-\omega_0 t}$
- $x(t) = x_0 e^{-M\omega_0 t} \left( \cos(\omega_a t) + \frac{M}{\sqrt{1-M^2}} \sin(\omega_a t) \right)$

### Exercice 3 : équation différentielle

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta}_i \\ \ddot{\theta}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\theta_{i+1} - \theta_i)/T_e \\ -\omega_0^2 \sin \theta_{i+1} \end{pmatrix}.$$

$$\text{D'où : } \begin{pmatrix} \theta_{i+1} = \theta_i + T_e \dot{\theta}_i \\ \dot{\theta}_{i+1} = \dot{\theta}_i - T_e \omega_0^2 \sin(\theta_{i+1}) \end{pmatrix}$$

