Exercice 1 : Oscillations d'une voiture

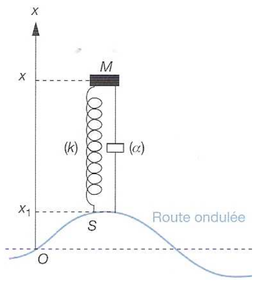
I- Fréquence propre (d'après un travail de S. Gruat)

On donne deux photos d'une des quatre roues avec et sans cric d'une voiture.

1) Proposer un modèle puis calculer la fréquence propre f_0 de ce véhicule.

II- Réponse indicielle

Dans le cadre d'un modèle simplifié de suspension, on assimile le véhicule précédent à un point matériel M (de masse $m = 1tonne$) posé sur un ressort dont l'autre extrémité S peut se déplacer le long d'une route. Le ressort a une constante de raideur k_{eq} et une longueur l_0 au repos.



On repère les positions de M et S par leurs abscisses $x(t)$ et $x_1(t)$ sur un axe vertical Ox tel que $x_1 = 0$ lorsque S se déplace sur une route horizontale.

En outre le point matériel est soumis à l'action d'un amortisseur fluide, caractérisé par un coefficient α, disposé entre les points M et S, S étant le point bas du dispositif d'amortissement. Le point matériel M subit de la part de l'amortisseur une force de frottement du type :$\overrightarrow{f_d} = -\alpha(v - v_1)\overrightarrow{u_x}$. En notant $v = \dot{x}$ et $v_1 = \dot{x_1}$ les vitesses respectives de M et S lors de leurs déplacements verticaux ($\overrightarrow{u_x}$ est le vecteur unitaire de l'axe Ox). Le coefficient α peut être réglé par la variation du débit d'huile à travers un trou percé dans le piston mobile de l'amortisseur. Ici $\alpha = 4020 kg.s^{-1}$.

2) Obtenir l'équation différentielle vérifiée par $X(t)$ où $X(t)$ mesure la position verticale du point M par rapport à sa position lorsque la voiture est immobile.
3) La voiture heurte un trottoir de 10 cm, cette sollicitation est alors assimilable à une excitation indicielle. Donner l'expression de $X(t)$ sachant que $X(0) = \dot{X}(0) = 0$
4) Pour des fréquences inférieures à 0,5 Hz, les organes internes du corps entrent précisément en résonance (en particulier l'estomac) et le mal des transports apparaît. Sera-t-on malade dans cette voiture ?

CONCOURS COMMUN INP

Exercice 2 : Thermodynamique chimie

1) Ecrire la réaction de combustion du méthane (coefficient stœchiométrique unitaire pour le méthane).
2) Calculer son enthalpie standard de réaction. Qualifier la réaction.

	$CH_{4(g)}$	$O_{2(g)}$	$CO_{2(g)}$	$H_2O_{(g)}$
$\Delta_f H^0 (kJ.mol^{-1})$	-75	-	-400	-250

3) On introduit 1L de méthane gazeux avec de l'oxygène en excès dans un réacteur initialement à 298K et à 1bar. Le mélange est supposé parfait. Calculer la chaleur Q mise en jeu.
4) Sachant que 1 tep (tonne équivalent pétrole) est l'énergie produite par la combustion d'une tonne de pétrole libérant alors 41,86GJ. Quelle masse de méthane faut-il brûler pour obtenir la même quantité d'énergie ?
5) Il faut 7g d'uranium pour produire la même quantité d'énergie. Commenter

CONCOURS COMMUN INP

Exercice 1 : Oscillations d'une voiture (corrigé)

I- Fréquence propre

La situation d'équilibre donne : $mg = 4k(l_0 - l_{eq})$ soit une pulsation propre d'oscillation du ressort équivalent (4 ressorts en parallèles de raideur k) donnée par :$\omega_0^2 = \frac{4k}{m} = \frac{g}{(l_0 - l_{eq})}$

Les deux photos donnent accès aux longueurs propre et à l'équilibre du ressort modélisant la suspension : $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{(l_0 - l_{eq})}} \approx 1{,}6Hz$

II- Fréquence de résonance

L'application du PFD donne : $m\frac{d^2x(t)}{dt^2}\overrightarrow{u_x} = -k_{eq}(l - l_0)\overrightarrow{u_x} - \alpha(v - v_1)\overrightarrow{u_x} - mg\overrightarrow{u_x}$

A l'équilibre : $0 = -k_{eq}(l_e - l_0) - mg$ soit $l_e = l_0 - \frac{mg}{k_{eq}}$

En travaillant autour de la position d'équilibre :

$$\frac{d^2X(t)}{dt^2} + \frac{\alpha}{m}\frac{dX(t)}{dt} + \frac{k_{eq}}{m}X(t) = \frac{\alpha}{m}\frac{dx_1(t)}{dt} + \frac{k_{eq}}{m}x_1(t)$$

Que l'on peut écrire : $\frac{d^2X(t)}{dt^2} + 2M\omega_0\frac{dX(t)}{dt} + \omega_0^2X(t) = \frac{F(t)}{m}$

En posant : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}}; M = \frac{\alpha}{2m\omega_0} = \frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{1}{k_{eq}m}}; F(t) = \alpha\dot{x}_1(t) + kx_1(t)$

Si x_1 est constante alors : $\frac{d^2X(t)}{dt^2} + 2M\omega_0\frac{dX(t)}{dt} + \omega_0^2X(t) = \frac{k}{m}x_1$

Ici : $\alpha = 4020kg.s^{-1}, m = 1000kg, k_{eq} = 24525N/m$ soit $M = 0{,}4$: la réponse est donc pseudopériodique et des oscillations seront possibles à la fréquence $f = f_0\sqrt{1 - M^2} \approx 1{,}3Hz$

Donc $X(t) = x_1 + e^{-Mw_0t}\left(Acos(w_at) + Bsin(w_at)\right)$

Et $\dot{X}(t) = e^{-Mw_0t}(-AM\omega_0cos(w_at) + BM\omega_0sin(w_at) - \omega_aAsin(w_at) + \omega_aBcos(w_at))$

$$X(0) = 0 = x_1 + A$$

$$\dot{X}(0) = 0 = -AM\omega_0 + \omega_aB$$

$$X(t) = x_1\left(1 - e^{-Mw_0t}cos(w_at) - \frac{M}{\sqrt{1 - M^2}}sin(w_at)\right)$$

L'oscillation n'est pas centrée sur la pulsation de 0,5Hz, donc pas de mal de transport.

CONCOURS COMMUN INP

Exercice 2 : Thermodynamique chimie (corrigé)

1) $CH_{4(g)} + 2O_{2(g)} = CO_{2(g)} + 2H_2O_{(g)}$
2) D'après la loi de Hess : $\Delta_r H^0 = -825 kJ/mol$
3) Avec la loi des GP, on trouve le nombre de mole de méthane que l'on peut consommer :
$$Q = \xi \Delta_r H^0 = \frac{PV}{RT} \Delta_r H^0 = -33{,}3 kJ$$
4) La masse m équivalente vérifie $m \times \frac{\Delta_r H^0}{M} = tep$ soit $m = 812 kg$ ce qui est analogue au pétrole
5) Avec l'uranium, on voit une performance certaine vis-à-vis de l'énergie libérable par une unité de masse de combustible consommée