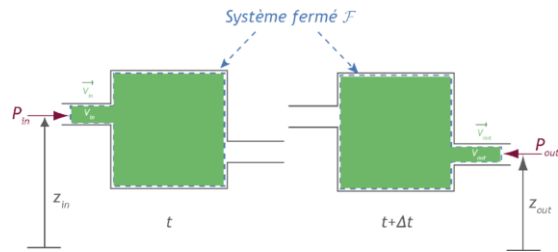


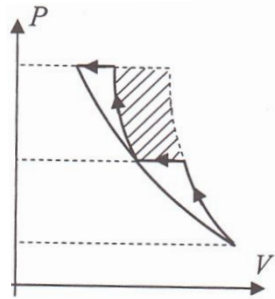
Exercice : 1e pp des systèmes en écoulement et compresseur

On considère l'écoulement d'une masse donnée de fluide à travers une simple canalisation. On indice par « in » toutes les grandeurs d'entrée et par « out » toutes les grandeurs de sortie.

- 1) Dans l'hypothèse d'un écoulement stationnaire, établir :
 - La conservation du débit massique
 - le premier principe des systèmes ouverts.



- 2) Un gaz parfait en écoulement traverse un compresseur imposant une compression adiabatique et mécaniquement réversible. On néglige les variations d'énergie cinétique et d'énergie potentielle macroscopique. Donner l'expression de w_i en fonction de M (masse molaire du gaz), γ (coefficient isentropique), T_i (température avant compression), P_i (pression avant compression) et P_f (pression après compression).
- 3) On représente ci-dessous l'effet d'un compresseur à 2 étages. Déterminer la pression intermédiaire permettant de minimiser le travail de compression.



Exercice : 1e pp des systèmes en écoulement et compresseur

On obtient : $(\Delta_s h + \Delta_s e_c + \Delta_s e_p) = 0$. Pour le compresseur : $w_i =$

$$\frac{R\gamma}{M(\gamma-1)} T_i \left(\left(\frac{P_f}{P_i} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1 \right)$$

Avec deux étages, le travail est :

$$w = \frac{R\gamma T_1}{M(\gamma-1)} \left(\left(\frac{P_4}{P_3} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + \left(\frac{P_3}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 2 \right)$$

Cette fonction présente un minimum et ce dernier peut se calculer en commençant à 1bar. La précision sera de 0,1bar

On peut chercher par calcul la valeur de $P_{2,min}$ minimisant le travail et donc associé à une dérivée qui s'annule en changeant de signe pour cette valeur :

$$\frac{dw}{dP_2} = \frac{R\gamma T_1}{M(\gamma-1)} \frac{\gamma-1}{\gamma} \left(-\frac{P_4}{P_2^2} \left(\frac{P_4}{P_2} \right)^{\frac{-1}{\gamma}} + \frac{1}{P_1} \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{-1}{\gamma}} \right)$$

$$\frac{dw}{dP_2} = \frac{RT_1}{M} \frac{1}{P_1} \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{-1}{\gamma}} \left(1 - \frac{P_4 P_1}{P_2^2} \left(\frac{P_4 P_1}{P_2^2} \right)^{\frac{-1}{\gamma}} \right)$$

$$\frac{dw}{dP_2} = \frac{RT_1}{M} \frac{1}{P_1} \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{-1}{\gamma}} \left(1 - \left(\frac{P_4 P_1}{P_2^2} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right)$$

Exercice : Thermodynamique des systèmes en écoulement

Déterminer la vitesse maximale d'éjection de l'air (assimilé à un gaz parfait) entrant à vitesse nulle dans une tuyère à la pression $P_e = 10 \text{ bar}$ et à la température $T_e = 400K$. Le gaz sort à la pression $P_s = 1,00 \text{ bar}$. L'écoulement horizontal et stationnaire est considéré adiabatique et réversible. On donne $10^{1/3} \approx 2$

Exercice : Système en écoulement

On considère l'air comme un gaz parfait, en écoulement stationnaire et subissant les transformations cycliques suivantes (on néglige les variations d'énergie potentielle de pesanteur et cinétique) :

- Compression adiabatique réversible dans un compresseur de l'état $A(P_A, T_A)$ à l'état $B(P_B, T_B)$. On note w_1 le travail massique fourni par le compresseur.
- Chauffage isobare (échangeur ou chambre à combustion) de T_B à T_C . On note q le transfert thermique reçu par l'unité de masse.
- Détente adiabatique réversible dans la turbine de l'état C à l'état $D(P_D = P_A, T_D)$: c'est la phase motrice. On note w_2 le travail massique fourni par l'air à la turbine.
- Refroidissement isobare (dans un échangeur ou dans l'atmosphère) jusqu'à l'état initial.

$$P_A = 1,0 \text{ atm}, T_A = 300K, P_B = 10 \text{ atm}, T_C = 1000K, \gamma = 1,5, M = 30 \text{ g.mol}^{-1}$$

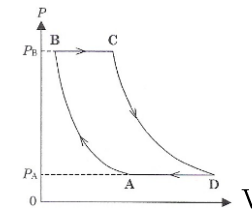
- Représenter le diagramme de Clapeyron $P(V)$ du cycle décrit par une masse quelconque d'air
- Exprimer dans l'ordre T_B, w_1, q, T_D et w_2
- Faire les applications numériques et estimer les transferts énergétiques massiques.
- Quel est le travail fourni à l'hélice. Définir et calculer le rendement du turbopropulseur sachant que la turbine fournit de l'énergie au compresseur pour son fonctionnement.
- Comparer le rendement à un moteur réversible ditherme de Carnot qui fonctionnerait entre les températures extrêmes atteintes au cours du cycle.

Exercice : Thermodynamique des systèmes en écoulement

Pour appliquer le 1^{er} principe des systèmes en écoulement, il manque la température finale. L'hypothèse d'une transformation adiabatique réversible (et donc adia mec rev) permet d'utiliser les lois de Laplace : $T_s = T_e \left(\frac{P_e}{P_s}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$. Donc en prenant $\gamma = 1,4$, on a $T_s = 400(10)^{-\frac{1}{3}} \approx 200K$

$$\text{Donc } \Delta_s h + \Delta_s e_c = 0 \text{ Donc } c_s = \sqrt{2c_p(T_e - T_s)} \approx 600 \text{ m/s}$$

Exercice : Système en écoulement



$$\text{Donc : } T_B = T_A \left(\frac{P_A}{P_B}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

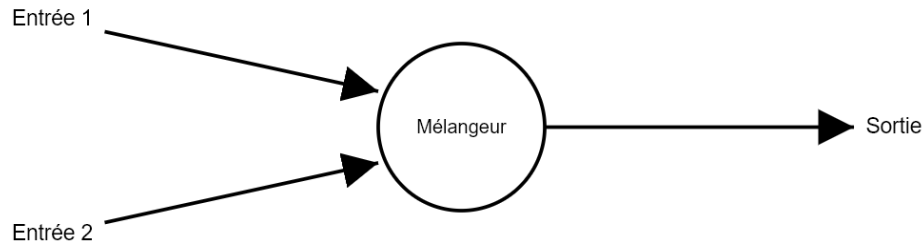
- Ensuite, il suffit d'appliquer le 1^{er} principe à cet écoulement : $\Delta h = w_1 = c_p T_A \left(\left(\frac{P_A}{P_B}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1 \right)$
- On applique toujours le 1^{er} principe en se rappelant que le travail des forces de pression est déjà pris en compte dans l'enthalpie : $\Delta h = q = c_p (T_C - T_B) = c_p \left(T_C - T_A \left(\frac{P_A}{P_B}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \right)$
- $T_D = T_C \left(\frac{P_B}{P_A}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$
- $\Delta h = w_2 = c_p T_C \left(\left(\frac{P_B}{P_A}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1 \right)$
- $T_B \approx 600K$; $w_1 \approx 300 \text{ kJ.kg}^{-1}$; $q = 400 \text{ kJ.kg}^{-1}$; $T_D \approx 500K$; $w_2 = -500 \text{ kJ.kg}^{-1}$

Le travail fourni à l'hélice est $|w_2| - |w_1| = 200 \text{ kJ.kg}^{-1}$ Le rendement est donc : $r = \frac{|w_2| - |w_1|}{q} = 0,5$ $r_{\text{carnot}} = 1 - \frac{T_A}{T_C} = 0,7$

Exercice : Mélangeur

On considère un mélangeur à deux entrées et une sortie :

- A la 1^e entrée le fluide 1 est de capacité thermique massique à pression constante c , une température T_1 et un débit massique D_{m1}
- A la 2^e entrée le fluide 2 est de même capacité thermique massique à pression constante c , une température T_2 et un débit massique D_{m2}
- A la sortie, le mélange est à une température T_3 et un débit massique D_{m3}
- On suppose le mélangeur parfaitement calorifugé, horizontal et on néglige les variations d'énergie cinétique. L'écoulement est stationnaire



- 1) Effectuer un bilan de masse et en déduire une relation entre les débits massiques.
- 2) Démontrer le 1^{er} principe des systèmes en écoulement et obtenir que $D_{m3}h_3 = D_{m1}h_1 + D_{m2}h_2$
- 3) En déduire la température T_3 en fonction de T_2, T_1, D_{m1}, D_{m2}
- 4) AN $T_1 = 80^\circ\text{C}, T_2 = 20^\circ\text{C}, D_{m1} = 3,0\text{kg.s}^{-1}, D_{m2} = 7\text{kg.s}^{-1}$

- 1) On considère le système fermé à t et $t + dt$:

$$\delta m_1 + \delta m_2 + m_c(t) = \delta m_3 + m_c(t + dt)$$

Avec l'hypothèse stationnaire :

$$\delta m_1 + \delta m_2 = \delta m_3$$

Et donc : $D_{m1} + D_{m2} = D_{m3}$

- 2) On effectue un bilan d'énergie à partir du 1^{er} principe :

$$E_{tot}(t + dt) - E_{tot}(t) = P_1 v_1 \delta m_1 + P_2 v_2 \delta m_2 - P_3 v_3 \delta m_3 + \delta W_i + \delta Q$$

Avec $E(t) = E_{com}(t) + \delta m_1 u_1 + \delta m_2 u_2$

Et $E(t + dt) = E_{com}(t + dt) + \delta m_3 u_3$

Donc $\delta m_3 h_3 - \delta m_1 h_1 - \delta m_2 h_2 = \delta W_i + \delta Q$

Ici $\delta W_i + \delta Q = 0$

$$D_{m3}h_3 = D_{m1}h_1 + D_{m2}h_2$$

- 3) On a un liquide de capacité thermique massique connue :

$$(D_{m1} + D_{m2})h_3 = D_{m1}h_1 + D_{m2}h_2$$

$$D_{m1}(h_3 - h_1) = D_{m2}(h_2 - h_3)$$

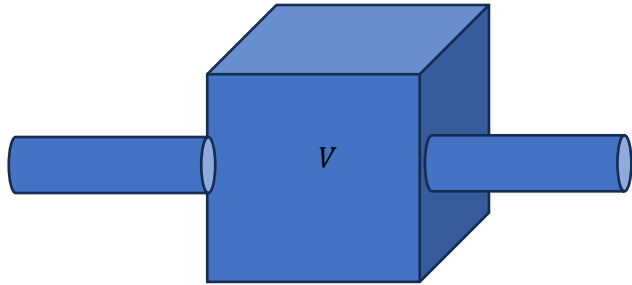
$$D_{m1}(T_3 - T_1) = D_{m2}(T_2 - T_3)$$

$$T_3 = \frac{D_{m2}T_2 + D_{m1}T_1}{D_{m1} + D_{m2}}$$

$$4) \quad T_3 = \frac{7 \cdot 20 + 3 \cdot 80}{10} = 38^\circ\text{C}$$

Exercice : premier principe des systèmes en écoulement non stationnaire

On considère de l'eau (phase condensée idéale de capacité thermique massique c de masse volumique ρ) en écoulement. L'eau arrive avec un débit massique D_{me} à la température T_e dans un volume V . Dans ce volume l'eau à une température supposée uniforme et est noté T et ressort à la température T avec un débit D_{ms} . Dans toute la suite on néglige les variations d'énergie cinétique et potentielle à l'échelle macroscopique. Le réacteur est calorifugé et sans partie mobile.



- 1) Démontrer le principe des systèmes en écoulement et montrer que $D_{ms}h_s - D_{me}h_e + \frac{dE}{dt} = 0$
- 2) Obtenir l'équation différentielle vérifiée par $T(t)$ si $D_{me} = D_{ms}$
- 3) Résoudre cette équation si $T(0) = T_0 < T_e$

- 1) On considère le système fermé à t et $t + dt$:

$$\delta m_e + m_c(t) = \delta m_s + m_c(t + dt)$$

On effectue un bilan d'énergie à partir du 1^{er} principe :

$$E_{tot}(t + dt) - E_{tot}(t) = P_e v_e \delta m_e + P_s v_s \delta m_s + \delta W_i + \delta Q$$

$$\text{Avec } E(t) = E_{com}(t) + \delta m_e u_e$$

$$\text{Et } E(t + dt) = E_{com}(t + dt) + \delta m_s u_s$$

$$\text{Donc } dE_{com} + \delta m_s h_s - \delta m_e h_e = \delta W_i + \delta Q$$

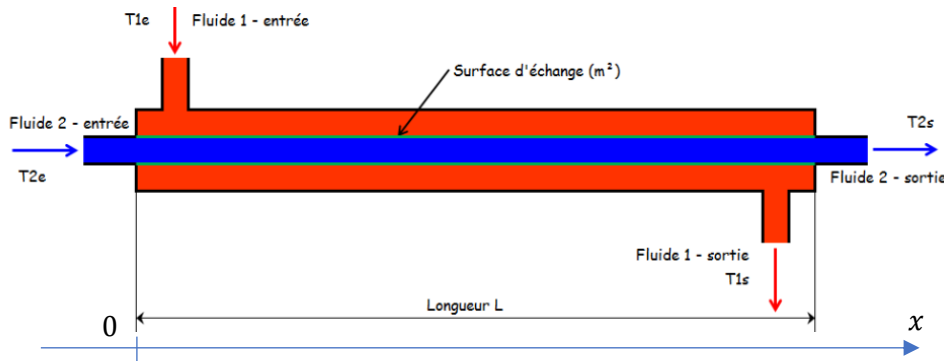
$$dE_{com} + \delta m_s h_s - \delta m_e h_e = 0$$

$$D_{ms}h_s - D_{me}h_e + \frac{dE}{dt} = 0$$

- 2) L'équation diff est : $\rho c V \frac{dT}{dt} + D_m c (T - T_e) = 0$
- 3) Donc en posant $\tau = \frac{\rho V}{D_m}$, on a $T(t) = (T_0 - T_e)e^{-t/\tau} + T_e$

Echangeur thermique à co-courant

On considère un fluide 2 froid de débit massique D de capacité thermique massique c s'écoulant dans une conduite centrale. Un fluide 1, identique au fluide 2, s'écoule dans le même sens avec le même débit dans une conduite qui entoure la première, permettant ainsi des échanges thermiques entre les 2 fluides. On note $T_1(x)$ la température du fluide 1 et $T_2(x)$ la température du fluide 2.



On admet que la puissance élémentaire $dP_{1-2} = -a(T_1 - T_2)dx$ qu'échange le fluide 1 avec le fluide 2. Tout l'ensemble est calorifugé et seuls les échanges thermiques sont à prendre en considération. On néglige les variations d'énergie cinétique et potentielle

- 1) $D_m c (T_2(x + dx) - T_2(x)) = a(T_1 - T_2)dx$
- 2) $D_m c (T_1(x + dx) - T_1(x)) = -a(T_1 - T_2)dx$
- 3) On obtient les équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} D_m c \frac{dT_2}{dx} = a(T_1 - T_2) \\ D_m c \frac{dT_1}{dx} = -a(T_1 - T_2) \end{cases}$$

- 4) Pour résoudre on peut additionner et soustraire les équations :

$$\begin{cases} D_m c \frac{dT_2 + T_1}{dx} = 0 \\ D_m c \frac{dT_1 - T_2}{dx} = -2a(T_1 - T_2) \end{cases}$$

La 2^e équation donne $\frac{d\Delta T}{dx} + \frac{\Delta T}{\delta} = 0$ avec $\delta = \frac{D_m c}{2a}$:

$$\text{Soit } T_1 - T_2 = (T_1(0) - T_2(0))e^{-\frac{x}{\delta}}$$

$$\text{La 1^e équation donne } T_2 + T_1 = T_2(0) + T_1(0)$$

$$\text{On obtient alors : } 2T_1 = (T_1(0) - T_2(0))e^{-\frac{x}{\delta}} + T_2(0) + T_1(0)$$

$$\text{Et } 2T_2 = T_2(0) + T_1(0) - (T_1(0) - T_2(0))e^{-\frac{x}{\delta}}$$

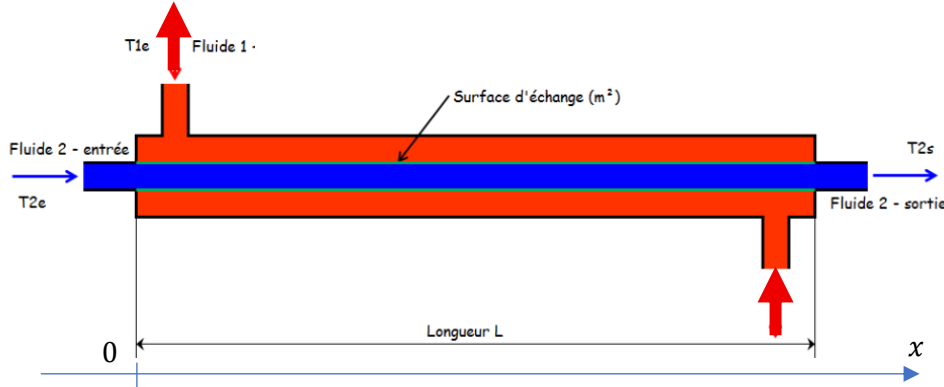
$$5) T_{2max} = \frac{(T_2(0) + T_1(0))}{2}$$

Avec ce type d'échangeur la température de sortie du liquide froid peut juste atteindre la température de sortie du liquide chaud

- 1) Appliquer le 1^{er} principe des systèmes en écoulement au fluide 2 entre x et $x + dx$.
- 2) Appliquer le 1^{er} principe des systèmes en écoulement au fluide 1 entre x et $x + dx$.
- 3) En déduire alors que : $\begin{cases} D_m c \frac{dT_2}{dx} = a(T_1 - T_2) \\ D_m c \frac{dT_1}{dx} = -a(T_1 - T_2) \end{cases}$
- 4) Obtenir $T_1(x)$ et $T_2(x)$
- 5) On suppose que le fluide 2 est froid et que le fluide 1 est chaud. Quelle est la haute température atteignable par le fluide 2 ?

Echangeur thermique à contre-courant

On considère un fluide 2 froid de débit massique D de capacité thermique massique c s'écoulant dans une conduite centrale. Un fluide 1, identique au fluide 2, s'écoule dans en sens opposé avec le même débit dans une conduite qui entoure la première, permettant ainsi des échanges thermiques entre les 2 fluides. On note $T_1(x)$ la température du fluide 1 et $T_2(x)$ la température du fluide 2.



On admet que la puissance élémentaire $dP_{1-2} = -a(T_1 - T_2)dx$ qu'échange le fluide 1 avec le fluide 2. Tout l'ensemble est calorifugé et seuls les échanges thermiques sont à prendre en considération. On néglige les variations d'énergie cinétique et potentielle

- 1) Appliquer le 1^e principe des systèmes en écoulement au fluide 2 entre x et $x + dx$.
- 2) Appliquer le 1^e principe des systèmes en écoulement au fluide 1 entre x et $x + dx$.
- 3) En déduire alors que :
$$\begin{cases} D_m c \frac{dT_2}{dx} = a(T_1 - T_2) \\ D_m c \frac{dT_1}{dx} = a(T_1 - T_2) \end{cases}$$
- 4) Obtenir $T_1(x)$ et $T_2(x)$
- 5) On suppose que le fluide 2 est froid et que le fluide 1 est plus chaud.
Montrer qu'il est possible que $T_2(L) > T_1(0)$?

- 1) $D_m c (T_2(x + dx) - T_2(x)) = a(T_1 - T_2)dx$
- 2) $D_m c (T_1(x) - T_1(x + dx)) = -a(T_1 - T_2)dx$
- 3) On obtient les équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} D_m c \frac{dT_2}{dx} = a(T_1 - T_2) \\ D_m c \frac{dT_1}{dx} = a(T_1 - T_2) \end{cases}$$

- 4) Pour résoudre on peut additionner et soustraire les équations :

$$\begin{cases} D_m c \frac{dT_2 - T_1}{dx} = 0 \\ D_m c \frac{dT_1 + T_2}{dx} = 2a(T_1 - T_2) \end{cases}$$

La 1^e équation donne : $T_2 - T_1 = T_2(0) - T_1(0)$

La 2^e équation donne $\frac{dT_1 + T_2}{dx} = -\frac{(T_2(0) - T_1(0))}{\delta}$

Soit $T_1 + T_2 = -\frac{(T_2(0) - T_1(0))}{\delta}x + T_1(0) + T_2(0)$

D'où $T_2 = \frac{(T_1(0) - T_2(0))}{2\delta}x + T_2(0)$

Et $T_1 = \frac{(T_1(0) - T_2(0))}{2\delta}x + T_1(0)$

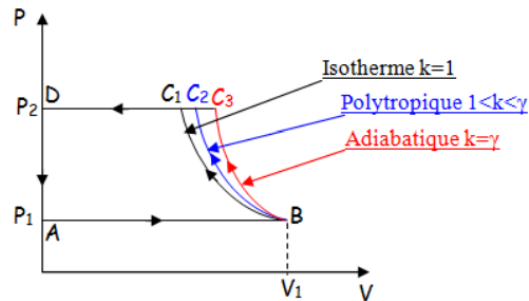
- 5) $T_2(L) = \frac{(T_1(0) - T_2(0))}{2\delta}L + T_2(0) > T_1(0)$

$$L > 2\delta$$

Avec ce type d'échangeur la température de sortie du liquide froid peut dépasser la température de sortie du liquide chaud

Compresseur polytropique à 3 étages

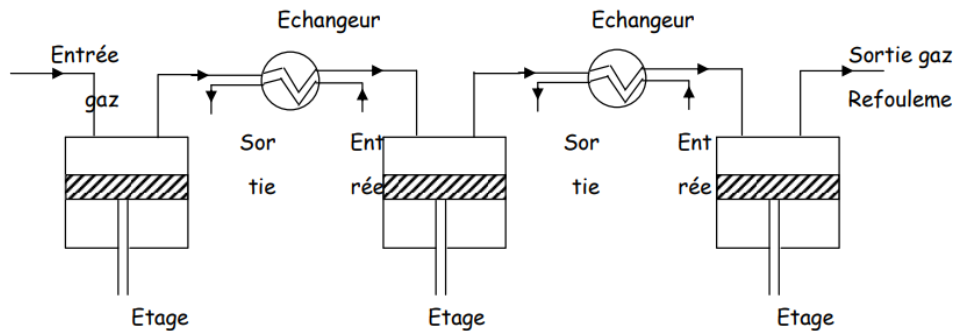
Afin de décrire de manière plus réaliste une compression, on prend le modèle polytropique $PV^k = Cte$ avec $1 < k < \gamma$. Ce modèle apporte la correction permettant de rendre compte du caractère adiabatique imparfait de la compression.



On note c_p la capacité thermique massique du gaz supposé parfait. On néglige les variations d'énergie cinétique et potentielle.

On va considérer un compresseur à trois étages :

- Assurant 3 compressions polytropiques telles que $\frac{P_{i+1}}{P_i} = Cte$
- Assurant 3 refroidissement isobare



Donner l'expression du travail massique total indiqué.

Avec un étage :

$$w_i = c_p(T_{i+1} - T_i)$$

Avec : $P^{1-k}T^k = Cte$ on a : $w_i = c_p T_i \left(\left(\frac{P_{i+1}}{P_i} \right)^{\frac{1-k}{k}} - 1 \right)$

Donc avec les trois étages :

$$w_i = 3c_p T_i \left(\left(\frac{P_{i+1}}{P_i} \right)^{\frac{1-k}{k}} - 1 \right)$$

On a aussi : $\frac{P_4}{P_3} = \frac{P_3}{P_2} = \frac{P_2}{P_1}$ donc $\frac{P_4}{P_1} = \frac{P_4}{P_3} \frac{P_3}{P_2} \frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{P_{i+1}}{P_i}\right)^3$

Donc si N étages

$$w_i = N c_p T_i \left(\left(\frac{P_{fin}}{P_{ini}} \right)^{\frac{1-k}{Nk}} - 1 \right)$$

Si $k = \gamma$ alors :

$$w_i = \frac{NR\gamma T_i}{M(\gamma - 1)} \left(\left(\frac{P_{fin}}{P_{ini}} \right)^{\frac{1-\gamma}{N\gamma}} - 1 \right)$$

On pose $\left(\frac{P_{fin}}{P_{ini}}\right)^{\frac{1-\gamma}{N\gamma}} = r^{\frac{k}{N}}$ avec $r = \frac{P_{fin}}{P_{ini}}$ et $k = \frac{1-\gamma}{\gamma}$ donc $w_i = \frac{NR\gamma T_i}{M(\gamma-1)} \left(r^{\frac{k}{N}} - 1\right)$

Et on pose $a = k \ln(r)$ donc $r = \exp\left(\frac{a}{k}\right)$ et $w_i = \frac{NR\gamma T_i}{M(\gamma-1)} \left(\exp\left(\frac{a}{N}\right) - 1\right)$

Avec N grand, on peut faire le DL : $w_i = \frac{NR\gamma T_i}{M(\gamma-1)} \frac{a}{N} = -\frac{RT_i}{M} \ln(r)$

Et on retrouve le travail isotherme.