

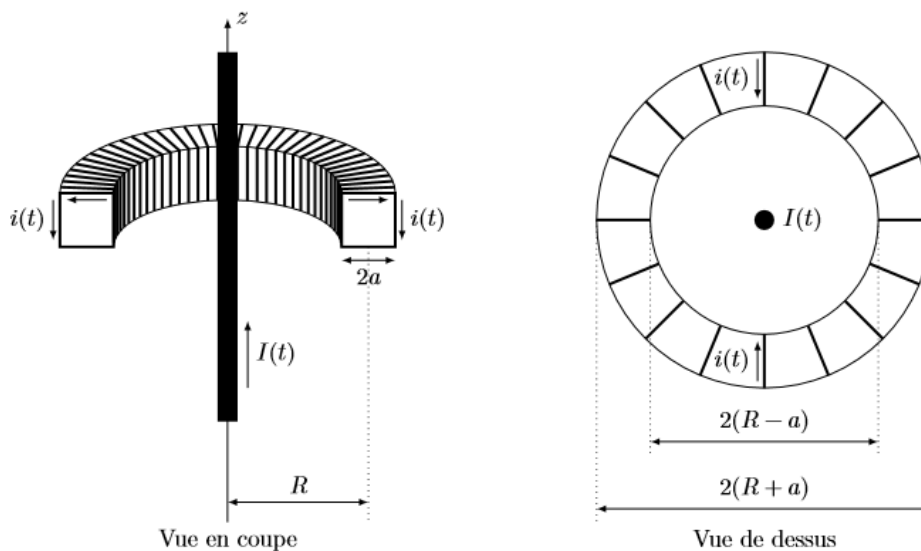


CONCOURS CENTRALE-SUPÉLEC

EM

Une bobine torique de section carrée de côté $2a$, de rayon moyen R , comportant N spires jointives est fermée sur un ampèremètre de résistance négligeable. La bobine torique a une résistance équivalente notée \mathcal{R} .

La bobine entoure un fil conducteur que l'on supposera rectiligne et infini et dont l'axe coïncide avec celui de la bobine torique ; le conducteur est parcouru par un courant $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$. Ce courant variable induit un courant $i(t)$ dans la bobine torique. Vu la symétrie du problème, on travaille en coordonnées cylindriques d'axe Oz .



1. Calculer, en exploitant soigneusement les symétries, le champ magnétique $\vec{B}_{\text{bobine}}(r, \theta, z, t)$ créé par la bobine en tout point, en fonction, notamment, de N , $i(t)$
2. Calculer, de même, le champ magnétique $\vec{B}_{\text{fil}}(r, \theta, z, t)$ créé par le fil en tout point, en fonction, notamment, de $I(t)$.
3. Donner la définition de l'inductance mutuelle M entre deux circuits et de l'inductance propre L d'un circuit. On donne ici (*calcul non demandé*) l'inductance propre de la bobine torique et l'inductance mutuelle entre le fil et la bobine torique :

$$L = \frac{\mu_0 N^2 a}{\pi} \ln \left(\frac{R+a}{R-a} \right) \qquad M = \frac{\mu_0 N a}{\pi} \ln \left(\frac{R+a}{R-a} \right)$$

Commenter ces expressions.

4. Calculer l'intensité complexe $\hat{i}(t)$ du courant dans la bobine en régime sinusoïdal forcé (régime imposé par le fil central, toujours parcouru par $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$).
5. Que devient le rapport $\left| \frac{\hat{i}}{I} \right|$ à haute fréquence ? Préciser le sens de l'expression « haute fréquence ».

On donne $N = 10000$; $R = 6 \text{ cm}$; $a = 1 \text{ cm}$; $f = 50 \text{ Hz}$; $\mathcal{R} = 0,2 \Omega$.

Pourquoi peut-on qualifier le dispositif de transformateur de courant ? Pourquoi est-ce un appareil très utilisé pour la mesure des forts courants ?



CONCOURS CENTRALE-SUPÉLEC

Corrigé

- 1) L'analyse des symétries du courant traversant la bobine aboutit à $\overrightarrow{B_{bobine}} = B_{\theta}(r, \theta, z, t)\overrightarrow{u_{\theta}}$ et l'analyse de ses invariances à $\overrightarrow{B_{bobine}} = B_{\theta}(r, z, t)\overrightarrow{u_{\theta}}$. L'application du théorème d'Ampère donne : $\overrightarrow{B_{bobine}} = \frac{\mu_0 N i(t)}{2\pi r} \overrightarrow{u_{\theta}}$
- 2) Le champ créé par le fil est donné aussi par $\overrightarrow{B_{bobine}} = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi r} \overrightarrow{u_{\theta}}$
- 3) L'inductance mutuelle et l'inductance propre sont les coefficients qui permettent de définir les flux magnétique influençant deux circuits :

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

Ici $\phi_{propre} \propto B_{bobine} \times N \propto N^2 i(t)$ soit $L \propto N^2$ et $\phi_{mut} \propto B_{fil} \times N \propto N i(t)$ donc $M \propto N$ et même ici $L = NM$ (l'inductance propre est N fois plus importante que l'inductance mutuelle)

- 4) On peut écrire l'équation électrique dans la pince : $e = \mathcal{R}i = -L \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt}$
Soit une équation différentielle d'un système d'ordre 1 : $\frac{di}{dt} + \frac{\mathcal{R}}{L} i = -\frac{M}{L} \frac{di}{dt}$
En notation complexe, on a : $\underline{i} = -\frac{I_0 j\omega/w_0}{N 1 + \frac{j\omega}{w_0}}$ avec $w_0 = \frac{\mathcal{R}}{L}$
- 5) Si $w \gg w_0$ $|i| = \frac{I_0}{N}$ et ici $f \gg 0,2\text{Hz}$

Ce dispositif est analogue à un transformateur avec un primaire et un secondaire. Au secondaire, on a un courant proportionnel à celui du primaire.

Un fort courant est nécessaire car $|i|$ est N fois plus faible que I_0 , il permet aussi d'éviter l'ouverture du circuit par un ampèremètre dont la résistance interne est plus grande. Cette valeur de N permet cependant d'avoir une sensibilité faible au bruit car $\Delta i = \frac{\Delta I_0}{N}$