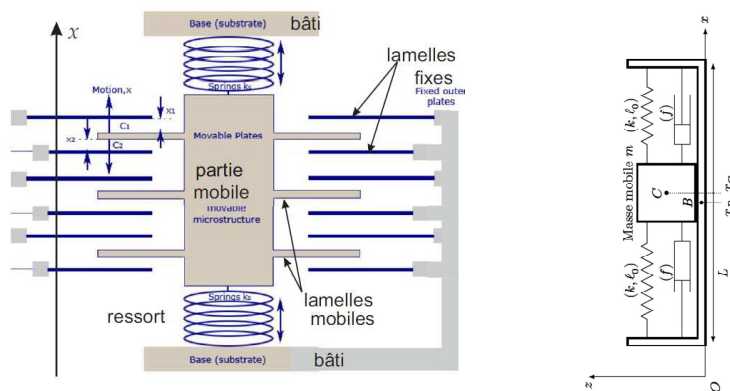
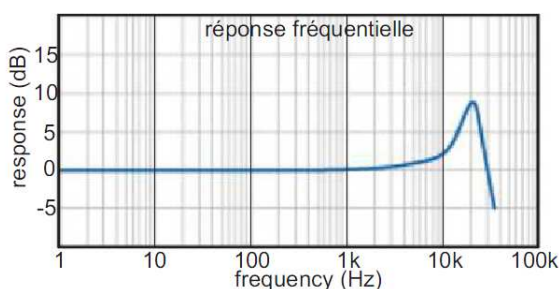
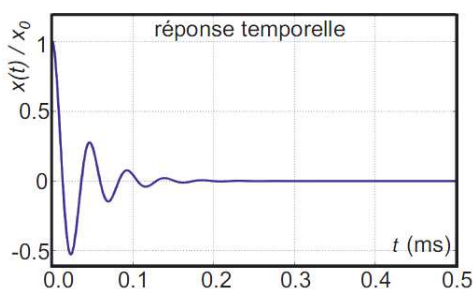


Exercice 1 : Accéléromètre (d'après un travail de B. Velay)

On souhaite ici modéliser un accéléromètre présent sur une console Wii. Le capteur (partie mobiles associée à 6 électrodes) peut osciller de manière amortie à l'aide de deux ressorts supposés identiques, de raideur k et de longueur à vide l_0 . Dans une approche mécanique, la partie mobile en translation suivant Ox sera modélisée par une simple masse m de centre de masse C de côte x_C . On note $x = x_C - x_B$, cette quantité est nulle lorsque le bâti n'est pas accéléré (avec B un point solidaire du bâti placé à $\frac{L}{2} = l_0$ des bases). La force de frottement totale sera donnée par $\vec{f} = -2\alpha\dot{x}\vec{u}_x$ (avec α constante). On pourra en première approximation négliger le poids et on mènera l'étude par rapport au référentiel terrestre de centre O supposé Galiléen. Le bâti est quant à lui animé d'un mouvement rectiligne et avec une accélération \vec{a} suivant \vec{u}_x .



Le constructeur propose les résultats suivants à la suite d'une analyse temporelle (où $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = 0$) et fréquentielle



- 1) Obtenir l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$.
- 2) Etablir l'expression de la pseudo-fréquence f_a du régime pseudo-périodique.
- 3) Effectuer une analyse harmonique et en déduire l'expression de la fréquence de résonance en élongation
- 4) Déterminer, par lecture, la fréquence de résonance f_r et la pseudo-fréquence f_a du régime amorti. En déduire la valeur du facteur d'amortissement M et la fréquence propre f_0 du système.
- 5) Commenter les réponses temporelle et fréquentielle vis-à-vis de l'utilisation.



Exercice 2 : Onde

Soient deux sources ponctuelles S_1 et S_2 vibrant à une amplitude respective $A_1 = A_0 \cos(\omega t)$ et $A_2 = A_0 \sin(\omega t)$, distantes de a de part et d'autre d'un axe optique.

On place un écran parallèle au plan contenant les deux sources et à une distance D de ces dernières ($D \gg a$).

Qu'observe-t-on ?

Exercice 1 : Accéléromètre

La force de rappel du ressort :

- de gauche est donnée par $\vec{T}_1 = -k(l_g(t) - l_0)\vec{u}_x = -k\left(\frac{l}{2} + (x_c - x_B) - l_0\right)\vec{u}_x$
- de droite est donnée par $\vec{T}_2 = k(l_d(t) - l_0)\vec{u}_x = k\left(\frac{l}{2} - (x_c - x_B) - l_0\right)\vec{u}_x$

Donc la force de rappel totale est : $\vec{T} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = -2k(x_c - x_B)\vec{u}_x = -2kX\vec{u}_x$

Appliquons la relation fondamentale de la dynamique dans le référentiel Galiléen d'étude pour ce mouvement astreint à être horizontal :

$$m \frac{d^2 \vec{OC}}{dt^2} = -2kX\vec{u}_x - 2f\dot{X}\vec{u}_x$$

Avec $\vec{OC} = \vec{OB} + \vec{BC} = \vec{OB} + X(t)\vec{u}_x$

$$\ddot{X} + \frac{2f}{m}\dot{X} + \frac{2k}{m}X = -a$$

On pose $\omega_0^2 = \frac{2k}{m}$ et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{2f}{m}$ soit $Q = \frac{\sqrt{km/2}}{f}$

En notation complexe, l'équation différentielle précédente devient : $\underline{X} = \frac{-a}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j\frac{\omega_0\omega}{Q}}$

$$\text{Soit : } \frac{X_m}{a_m} \omega_0^2 = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}}$$

L'analyse du dénominateur $g(x) = (1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2$ donne :

$$g'(x) = -4x(1-x^2) + \frac{2x}{Q^2} = x\left(\frac{2}{Q^2} - 4(1-x^2)\right)$$

On trouve donc une pente nulle en $x_1 = 0$ et $x_2 = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$

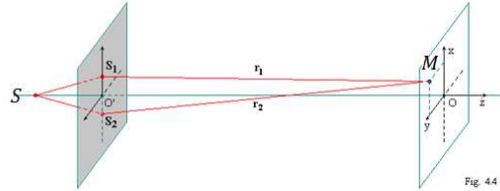
Les graphes nous donnent accès à la fréquence de résonance f_r et pseudo-fréquence f_0 :

$$f_r = 20\text{kHz} = f_0\sqrt{1-2M^2} \text{ Et } f_a = f_0\sqrt{1-M^2} \approx 22\text{kHz} \text{ donc } \frac{f_r}{f_a} = \frac{\sqrt{1-2M^2}}{\sqrt{1-M^2}}$$

$M = \sqrt{\frac{f_a^2 - f_r^2}{2f_a^2 - f_r^2}} \approx 0,4$ on trouve alors la fréquence propre : $f_0 = 24\text{kHz}$. Ce comportement en fréquence est donc adéquat pour transmettre (sans déphasage et déformation) les variations bien plus lentes imposées par le mouvement d'un joueur de wii.

Exercice 2 : Onde

On observe alors, pour ces sources ponctuelles et monochromatiques, une figure d'interférence dont les franges sont parallèles comme dans le cas de trous d'Young :



Dans ces conditions, nous supposons que les deux vibrations sont également planes. L'amplitude de la vibration lumineuse totale est alors donnée par : $a(M, t) = a_1(M, t) + a_2(M, t)$

Avec $a_1(M, t) = A_0 \cos\left(\omega_0 t - \frac{2\pi}{\lambda_0} S_1 M\right)$

soit $\underline{a}_1(M) = A_0 e^{-j\frac{2\pi}{\lambda_0} S_1 M}$

Et : $a_2(M, t) = A_0 \sin\left(\omega_0 t - \frac{2\pi}{\lambda_0} S_2 M\right) = A_0 \cos\left(\omega_0 t - \frac{2\pi}{\lambda_0} S_2 M - \frac{\pi}{2}\right)$

soit $\underline{a}_2(M) = A_0 e^{-j\frac{2\pi}{\lambda_0} S_2 M} e^{-j\frac{\pi}{2}}$

A noter que les fentes d'Young sont équivalentes à une superposition de trous d'Young et permettent simplement d'observer une figure plus lumineuse et plus étendue grâce à la diffraction.

La différence de marche δ (ou de différence de chemin optique) est donné ici par : $\delta = (S_2 M) - (S_1 M) = S_2 M - S_1 M$

$$\overline{S_1 M} = \overline{S_1 O'} + \overline{O' M} \text{ et } \overline{S_2 M} = \overline{S_2 O'} + \overline{O' M}$$

Ainsi : $S_1 M^2 = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2$

Et : $S_2 M^2 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2$

On trouve alors : $S_2 M^2 - S_1 M^2 = 2ax$

En supposant $x \ll D, y \ll D$ et sachant que $a \ll D$:

$S_2 M - S_1 M \approx \frac{2ax}{2D}$ donc $\delta \approx \frac{xa}{D}$

L'éclairement $\mathcal{E}(M)$ au point M est donné par :

$$\mathcal{E} = K \underline{a}(M) \times \underline{a}^*(M)$$

$$\mathcal{E} = K \left(\left(\underline{a}_1(M) + \underline{a}_2(M) \right) \times \left(\underline{a}_1^*(M) + \underline{a}_2^*(M) \right) \right)$$

$$\mathcal{E} = KA_0^2 + KA_0^2 + 2 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta - \frac{\pi}{2}\right) = 2KA_0^2 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta - \frac{\pi}{2}\right) \right)$$

$$\mathcal{E} = 2\mathcal{E}_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta - \frac{\pi}{2}\right) \right)$$

On a donc un éclairement « décalé » par rapport à la situation « habituelle » d'onde en phase.