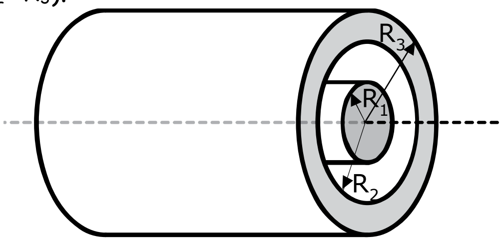
CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

On considère un câble coaxial constitué de deux conducteurs métalliques homogènes. Le cœur est un cylindre vertical de rayon R_1, la gaine est le volume défini entre les cylindres verticaux de rayons R_2 et R_3. Entre le cœur et la gaine se trouve un isolant qui possède, pour les besoins de l'exercice, les mêmes propriétés que le vide. L'extension vertical est importante et permet de négliger tout effet de bord. ($R_1 < R_2 < R_3$).



1) Nous sommes en régime permanent, le cœur est traversé par un courant ascendant d'intensité I, la gaine est traversé par le courant de « retour » d'intensité –I.
   On considère que la répartition de courant est uniforme dans chaque conducteur.
   a) Déterminer les densités volumiques de courant existant en tout point des conducteurs
   b) En déduire le champ d'induction magnétique $\vec{B}$ créé dans tout l'espace.
   c) Représenter la distribution du champ d'induction magnétique.
2) On étudie maintenant le dispositif en régime sinusoïdal dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaires, le courant i(t) se représente sous forme complexe par la fonction suivante $\underline{i}(t)=\underline{I}_0 \exp(jwt)$. Les cylindres conducteurs ont une excellente conductivité ohmique les courants sont alors surfaciques.
   a) Déterminer les densités surfaciques de courant pour chacun des cylindres. Comment justifier le caractère nul de la distribution surfacique en R_3 ?
   b) En déduire le champ d'induction magnétique $\vec{B}$ créé dans tout l'espace.
   c) Déterminer l'inductance propre linéique de la structure

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

1) On a donc deux vecteur densité de courant volumique : $j = \frac{I}{\pi R_1^2}$ et $j' = \frac{I}{\pi(R_3^2 - R_2^2)}$

On va utiliser un contour circulaire centré sur l'axe Oz.

- $r < R_1$ alors $B(r) = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$
- $R_1 < r < R_2$ alors $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$
- $R_2 < r < R_3$ alors $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} - \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\left(\frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2}\right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\left(1 - \left(\frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2}\right)\right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\left(\frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2}\right)$
- $r > R_3$ alors $B(r) = 0$

2) Les vecteur densité de courant surfacique sont : $\vec{j_s} = \frac{I}{2\pi R_1}\vec{u_z}$ et $\vec{j_s'} = -\frac{I}{2\pi R_2}\vec{u_z}$. Le champ magnétique est nécessairement nul à l'extérieur de la structure (car le courant total enlacé est nul) et $\vec{B}(R_3^+) - \vec{B}(R_3^-) = \mu_0 \overrightarrow{j_s''} \wedge \vec{u_r}$ soit $\vec{B}(R_3^-) = -\mu_0 j_s'' \overrightarrow{u_\theta}$.
Dans le conducteur le champ magnétique s'annule après une profondeur de peau supposée faible et donc $\vec{B}(R_2^-)$ est nul : il n'y a donc pas de courant sr la surface extérieure donc le champ est nul sauf entre R1 et R2 et est donné par $B = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi r}$. L'inductance linéique peut s'obtenir par calcul du flux :$L = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$