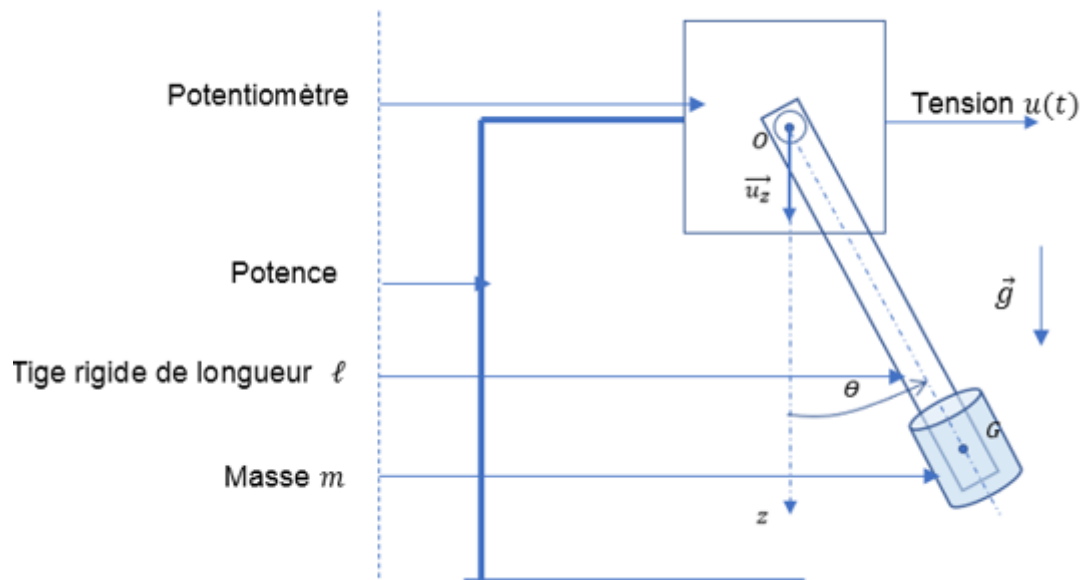


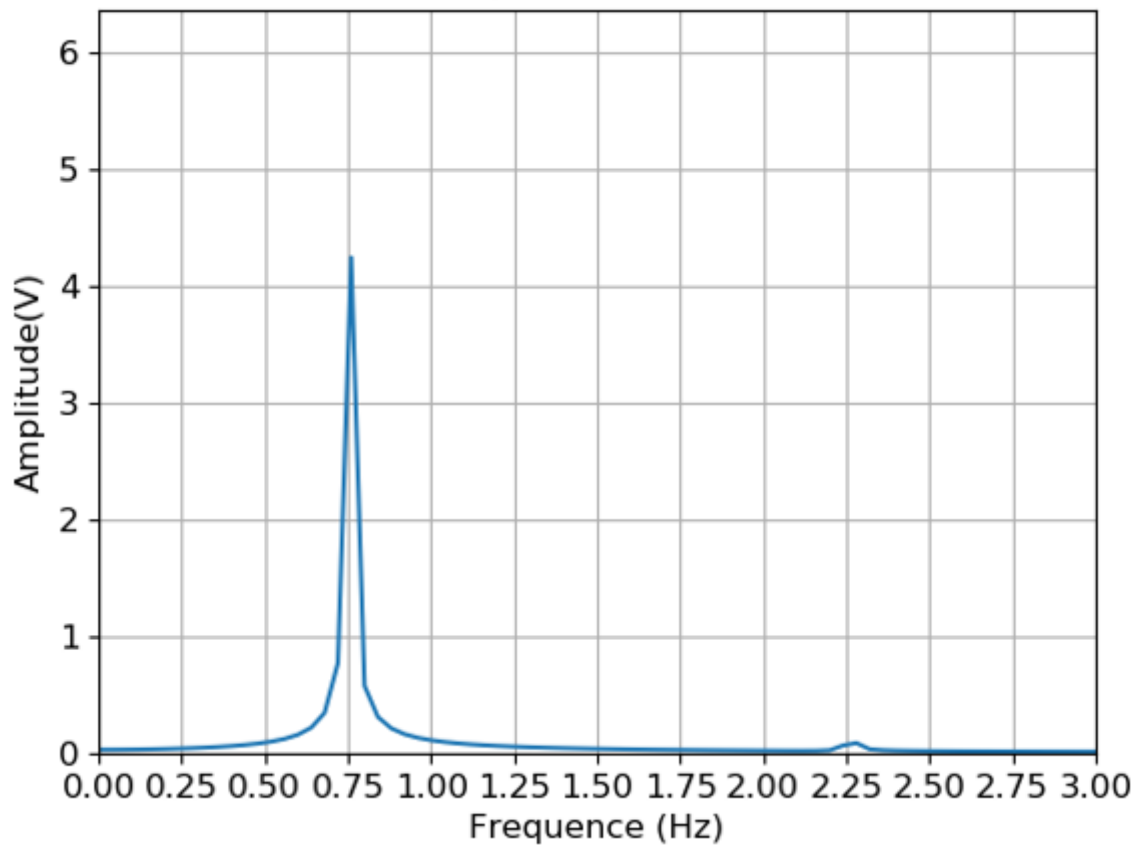
Oscillation anharmonique du pendule pesant

On note J le moment d'inertie de ce pendule par rapport à son axe de rotation. On suppose la liaison pivot parfaite en O . On note $l = OG$ avec G le centre de masse, g l'intensité du champ de pesanteur terrestre et m la masse du pendule. On note $\theta(t)$ la position angulaire du pendule par rapport à la verticale. L'oscillation du pendule génère une tension $u(t)$ proportionnelle à $\theta(t)$.



1) Obtenir l'équation différentielle du mouvement par une méthode énergétique et par une méthode dynamique.

On lance le pendule et on obtient le spectre ci-dessous :



2) L'oscillation est-elle harmonique ? Justifier.

On va résoudre numériquement cette équation en utilisant un schéma d'Euler implicite avec :

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

Tel que :

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \vec{f}(t, \vec{y})$$

Chaque échantillon est associé à un triplet $(t_i = iT_e, \theta_i, \dot{\theta}_i)$ avec T_e la période d'échantillonnage

3) Montrer, en utilisant un schéma d'Euler explicite que :

$$\begin{pmatrix} \theta_{i+1} = \theta_i + T_e \dot{\theta}_i \\ \dot{\theta}_{i+1} = \dot{\theta}_i - T_e \omega_0^2 \sin(\theta_i) \end{pmatrix}$$

4) Implémenter un code Python permettant de résoudre ce problème de Cauchy. Pour les conditions initiales, on suppose que le pendule est lâché sans vitesse initiale depuis une position angulaire de 60° . On utilisera les variables globales suivantes :

In []:

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 w0=2*np.pi
5 Te=10**-3
6 duree=10*2*np.pi/w0
7 N=int(duree/Te)
8 t=np.linspace(0,duree,N)
9 y=np.zeros((2,N))

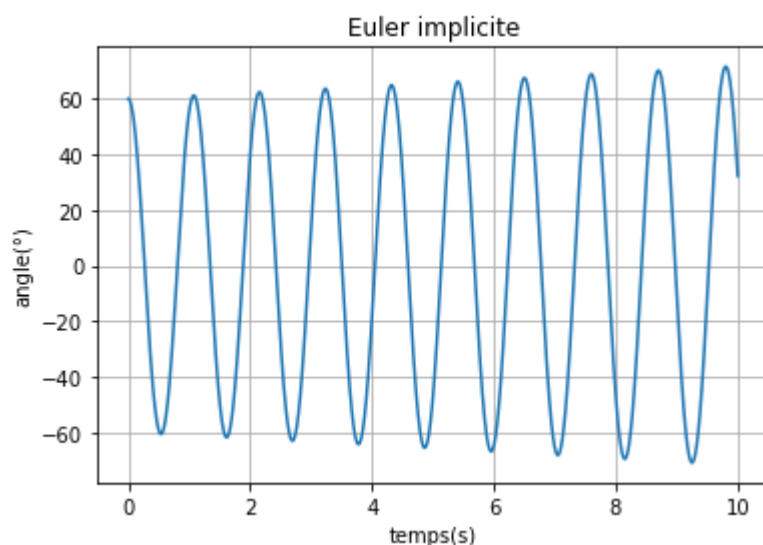
```

In [2]:

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 w0=2*np.pi
5 Te=10**-3
6 duree=10*2*np.pi/w0
7 N=int(duree/Te)
8 t=np.linspace(0,duree,N)
9 y=np.zeros((2,N))
10 y[0,0]=60*np.pi/180
11
12 for i in range (N-1):
13     y[0,i+1]=y[0,i]+Te*y[1,i]
14     y[1,i+1]=y[1,i]-Te*w0**2*np.sin(y[0,i])
15
16 plt.plot(t,y[0]*180/np.pi)
17 plt.xlabel("temps(s)")
18 plt.ylabel("angle(°)")
19 plt.title("Euler implicite")
20 plt.grid()
21 plt.show()

```



5) Le code précédent, basé sur un schéma explicite, a le défaut de ne pas conserver l'énergie mécanique. Modifier ce dernier afin d'imposer un schéma semi_implicite. Observer $\theta(t)$

$$\begin{pmatrix} \theta_{i+1} \\ \dot{\theta}_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_i \\ \dot{\theta}_i \end{pmatrix} + T_e \begin{pmatrix} \dot{\theta}_i \\ -\omega^2 \sin(\theta_i) \end{pmatrix}$$

In [3]:

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 w0=2*np.pi
5 Te=10**-3
6 duree=10*2*np.pi/w0
7 N=int(duree/Te)
8 t=np.linspace(0,duree,N)
9 y=np.zeros((2,N))
10 y[0,0]=60*np.pi/180
11
12 for i in range (N-1):
13     y[0,i+1]=y[0,i]+Te*y[1,i]
14     y[1,i+1]=y[1,i]-Te*w0**2*np.sin(y[0,i+1])
15
16 plt.plot(t,y[0]*180/np.pi)
17 plt.xlabel("temps(s)")
18 plt.ylabel("angle(°)")
19 plt.title("Euler implicite")
20 plt.grid()
21 plt.show()
22

```

