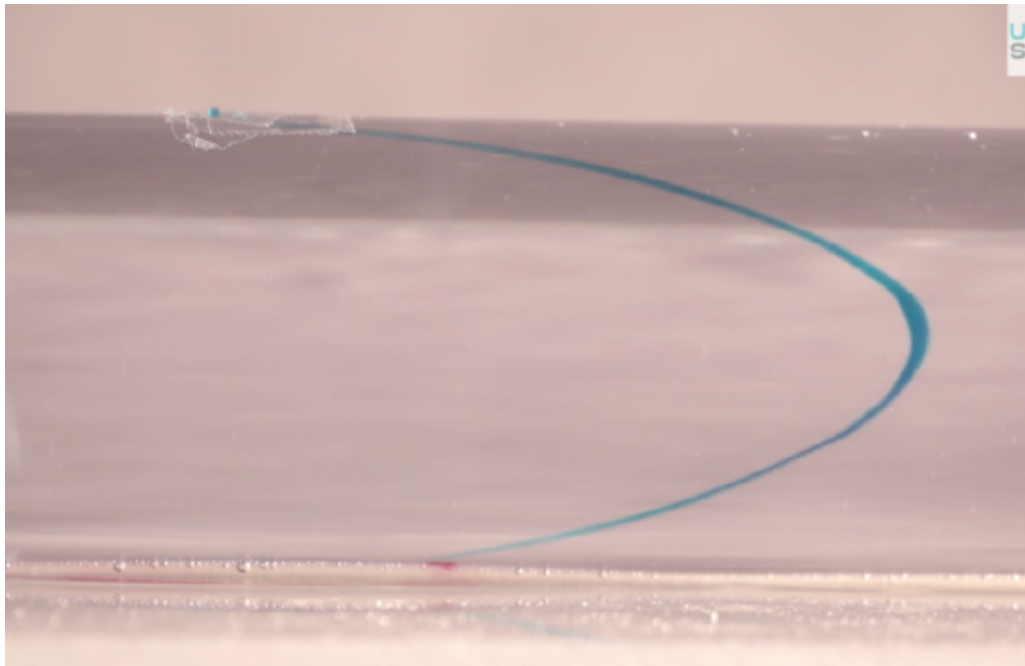


# Ecoulement de Poiseuille

Un fluide visqueux de coefficient de viscosité dynamique  $\eta$  est compris dans un cylindre d'axe  $Oz$ , de rayon  $R$ .

- On se place dans les coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ .
- On suppose l'écoulement unidimensionnel :  $\vec{v} = v_z(r, \theta, z, t)\vec{u}_z$
- On suppose que le problème est à symétrie de révolution :  $\partial/\partial\theta = 0$ .
- On suppose l'écoulement stationnaire :  $\partial/\partial t = 0$
- On suppose le fluide incompressible.
- On néglige la pesanteur.



1) Montrer que le champ des vitesses ne dépend pas de  $z$  puis justifier le mouvement rectiligne uniforme des particules de fluide en mouvement.

On utilise l'équation de conservation de la masse avec les conditions de travail :

$$\text{div}\vec{v} = 0$$

On a conservation du débit volumique et surtout, avec cet écoulement axial, on a  $\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$  Donc le mouvement est axial et sa la vitesse reste constante : les particules de fluide sont animées d'un mouvement rectiligne uniforme.

On donne l'expression de la force surfacique de viscosité en cylindrique  $\vec{dF}_\eta$  s'exerçant sur une surface  $dS$  d'une particule de fluide :

$$\vec{dF}_\eta = \eta \frac{\partial v_z}{\partial r} \vec{u}_z$$

2) A l'aide d'une étude dynamique, montrer que le champ des pression  $P$  est tel que  $P(z)$  est une fonction affine.

Pas d'accélération est donc compensation de la force motrice pressante et résistante de viscosité :  $(P(z) - P(z+dz))\pi r^2 + \eta \frac{\partial V_z(r)}{\partial r} * 2\pi r dz = 0$   $\frac{dP}{dz} = \frac{2\eta}{r} \frac{\partial V_z(r)}{\partial r}$  Cette égalité impose :  $\frac{dP}{dz} = Cte$  et donc que la pression est une fonction affine (nécessairement décroissante d'après Bernoulli):

$$P(z) = -\frac{\Delta P}{L} * z + P(0)$$

3) En déduire une expression du champ des vitesses  $v_z(r) = v_0(1 - \frac{r^2}{R^2})$  permettant d'interpréter la photographie ci-dessus.

$$\frac{-\Delta P}{L} = \frac{2\eta}{r} \frac{\partial V_z(r)}{\partial r} \text{ Donc } v_z = -\frac{\Delta P r^2}{4\eta L} + Cte$$

Or le caractère réel du fluide impose la nullité du champ des vitesses sur la conduite en  $r=R$

$$v_z = \frac{\Delta P}{4\eta L} (R^2 - r^2)$$

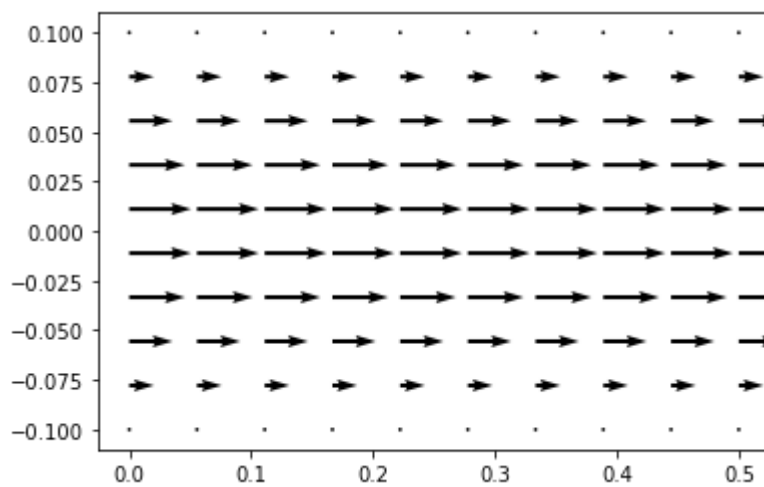
4) Compléter le code ci-dessous afin de pouvoir observer quelques vecteur champ dans le plan vertical de la conduite

In [ ]:

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 R=0.1
4 Nz=10
5 Nr=10
6 z=np.linspace(0,0.5,Nz)
7 r=np.linspace(-R,R,Nr)
8 tab_z,tab_r=np.meshgrid(z,r)
9 v0=1
10
```

In [7]:

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 R=0.1
4 Nz=10
5 Nr=10
6 z=np.linspace(0,0.5,Nz)
7 r=np.linspace(-R,R,Nr)
8 tab_z,tab_r=np.meshgrid(z,r)
9 v0=1
10 vz=v0*(1-tab_r**2/R**2)
11 vx=np.zeros((Nr,Nz))
12 plt.quiver(tab_z,tab_r,vz,vx)
13 plt.show()
```



In [ ]:

1