

# Diffusion thermique dans une tige

On considère une tige métallique de longueur  $L$ , de conductivité thermique  $\lambda$ , de masse volumique  $\rho$  et de capacité thermique  $c$ .

Cette tige cylindrique est entièrement calorifugée. Son rayon  $R \ll L$  permet de noter  $T(x, t)$  le champ des températures de cette tige.

Initialement, le profil des températures est linéaire :  $T(x, 0) = T_{max} - \frac{T_{max} - T_{min}}{L}x$

$T_{max} > T_{min}$  et  $T_{min}$  sont des températures constantes.

Cette tige est alors le siège d'un phénomène de conduction thermique unidirectionnel selon son axe Ox.

1) Effectuer un bilan enthalpique sur un élément de volume au coeur de la tige et obtenir l'équation de la chaleur

$$dH(M, t + dt) - dH(M, t) = -\text{div}(\vec{j})dVdt$$

$$\rho c \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right) = \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)$$

Dans la suite, on prendra

$\lambda = 500 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ ,  $c = 1000 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ ,  $L = 1 \text{ m}$ ,  $T_{max} = 60^\circ \text{C}$ ,  $T_{min} = 20^\circ \text{C}$  et  $\rho = 10^4 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

2) Faire une analyse dimensionnelle de l'équation de la chaleur et en déduire un temps caractéristique de diffusion de la chaleur sur cette tige.

Le temps caractéristique de diffusion sur la toute la tige est :  $\tau = \frac{\rho c L^2}{\lambda}$

$\tau = 20000 \text{ s}$

3) Effectuer un bilan enthalpique aux extrémité de la tige en considérant un échantillon de longueur  $\delta$  et en déduire que :

$$\left( \frac{\partial T}{\partial t} \right) = \frac{\lambda}{\rho c \delta} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0}$$

$$\left( \frac{\partial T}{\partial t} \right) = -\frac{\lambda}{\rho c \delta} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=L}$$

Aux extrémité, il n'y a qu'un flux diffusif (en orienter les éléments vectoriels de surface vers l'intérieur) :

$$\rho c S \delta \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right) = \lambda \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} S$$

$$\rho c S \delta \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right) = -\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=L} S$$

L'analyse numérique aboutit à discrétiser le temps avec un pas  $t_e = 10s$  et l'espace avec un pas  $\delta = 10cm$ .

- On note  $N_x$  le nombre d'échantillons spatiaux à considérer sur la tige.
- On note  $N_t$  le nombre d'échantillons temporels

Pour chaque élément de la tige de longueur  $\delta$  on a une température  $T[i, j]$  où  $x_i = i\delta$  et  $t_j = jt_e$  avec  $i$  et  $j$  entiers.

4) Ecrire la dérivée partielle  $\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)$  selon une formule de différence finie centrée d'ordre 2.

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right) = \frac{T[i+1, j] + T[i-1, j] - 2T[i, j]}{\delta^2}$$

5) Proposer un schéma d'Euler explicite pour résoudre ce problème et remplir le tableau T de dimension  $(N_x, N_t)$  décrivant l'évolution spatio-temporelle de la température.

In [25]:

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 lamb = 500
4 pau = 10**4
5 c = 1000
6 L = 1
7 delta = 0.1
8 Nx = int(L/delta) + 1
9 duree = 10000
10 Te = 10
11 Nt = int(duree/Te) + 1
12 K = lamb*Te/(pau*c*delta**2)
13 T_max = 60
14 T_min = 20
15 T_initial = 25
16 t = np.linspace(0, duree, Nt)
17 x = np.linspace(0, L, Nx)
18 T = np.zeros((Nx, Nt))
19 T[:, 0] = T_max - (T_max - T_min) * x/L
```

On pose  $K = \frac{\lambda * t_e}{\rho c \delta^2}$

Dans la tige :

$$T[i, j+1] - T[i, j] = K * (T[i+1, j] + T[i-1, j] - 2T[i, j])$$

$$T[i, j+1] = K * (T[i+1, j] + T[i-1, j]) + (1 - 2K)T[i, j]$$

Aux extrémités :

$$T[0, j+1] = K(T[1, j] - T[0, j]) + T[0, j]$$

$$T[-1, j+1] = -K(T[-1, j] - T[-2, j]) + T[-1, j]$$

Donc on peut construire un tableau  $T[j+1] = MT[j]$

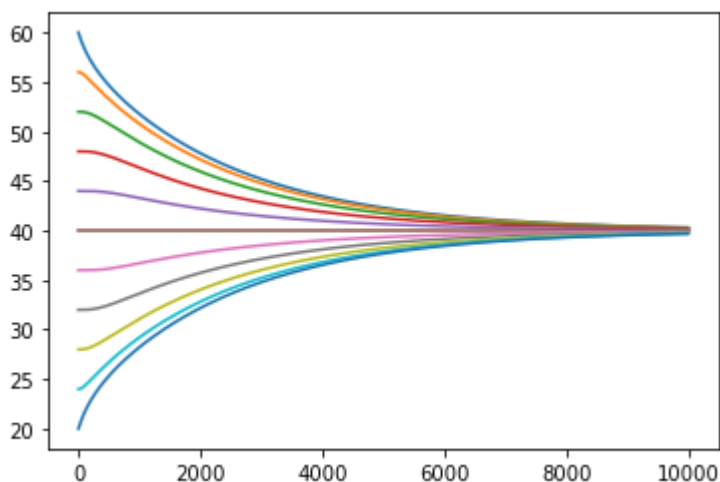
In [26]:

```
1 M=np.zeros((Nx,Nx))
2 for i in range(1,Nx-1):
3     M[i,i-1]=M[i,i+1]=K
4     M[i,i]=1-2*K
5 M[0,0]=M[-1,-1]=1-K
6 M[0,1]=M[-1,-2]=K
7 for i in range(len(t)-1):
8     T[:,i+1]=np.dot(M,T[:,i])
```

6) Obtenir sur un même graphe, l'évolution temporelle des températures de chaque cellule.

In [27]:

```
1 for i in range(len(x)):
2     plt.plot(t,T[i,:])
```



In [ ]:

1

