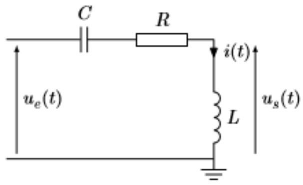
CONCOURS COMMUN INP

Exercice 1 : Electronique

On cherche à traiter un signal électrique proche de 300 Hz, comportant un bruit à 50 Hz que l'on veut filtrer. Plus précisément, on souhaite construire un filtre passe-haut présentant une atténuation importante à $f_1 = 50\text{Hz}$ ($G_{dB}(f_1) \leqslant -20$ dB), mais la plus faible possible à $f_2 = 300$ Hz ($G_{dB}(f_2) \geqslant -0{,}5$ dB).

1. Tracer le gabarit du filtre. Un filtre passe haut du premier ordre peut-il convenir ? Justifier.

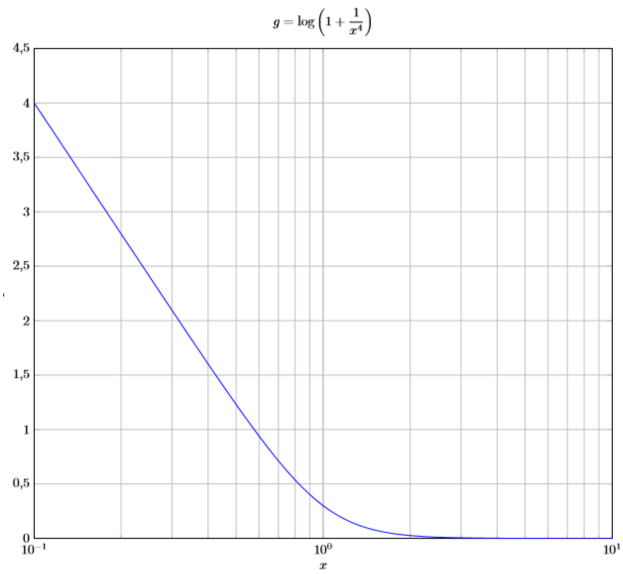
On considère maintenant un filtre passe haut RLC du second ordre, constitué d'une résistance R, d'un condensateur de capacité C et d'une bobine d'inductance L.



Sa fonction de transfert s'écrit : $\underline{H} = \dfrac{-x^2}{1 - x^2 + j\dfrac{x}{Q}}$ avec $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$.

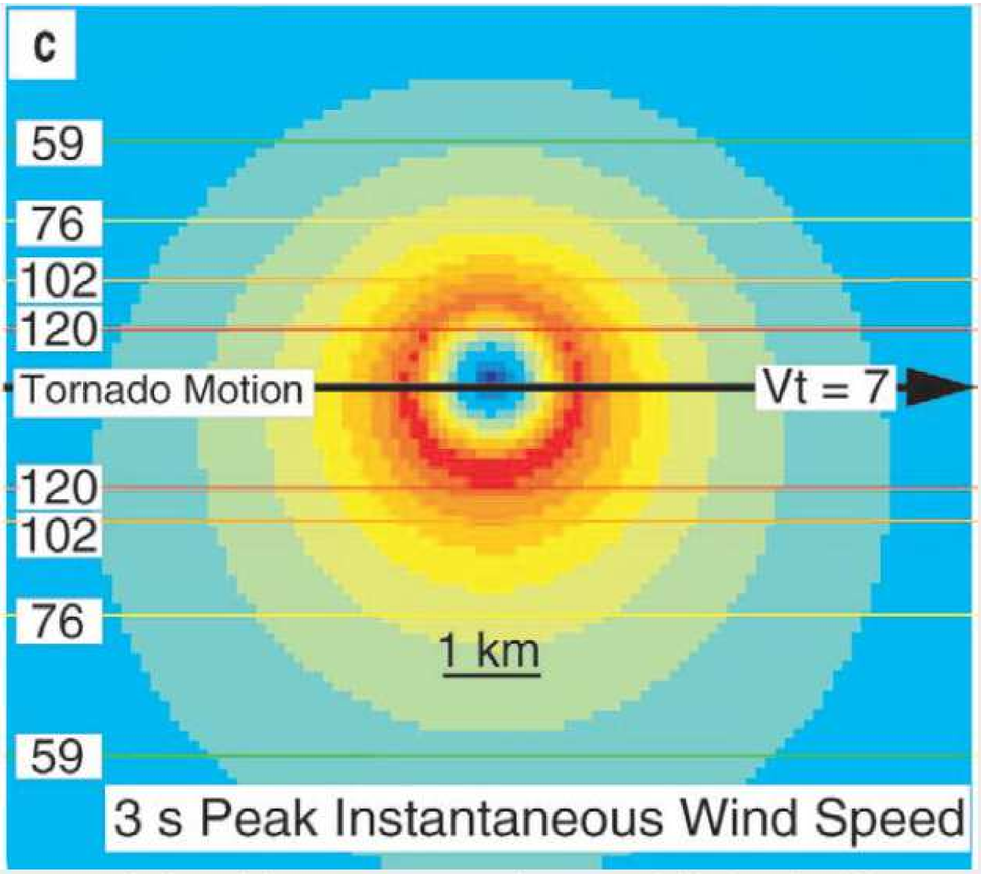
2. Déterminer l'expression de ω_0 et de Q en fonction R, L et C.

3. Afin d'éviter les distorsions de signal, on souhaite $Q = 1/\sqrt{2}$. Déterminer ω_0, puis la valeur minimale de L, sachant que $C \leqslant 10^{-6}$ F. Commenter le résultat obtenu. On exploitera la courbe donnée en annexe, représentant la fonction $g = \log(1 + 1/x^4)$ en fonction de x.



Exercice 2 : Modélisation d'une tornade (d'après un travail du GRIESP)

L'étude d'une tornade a permis d'obtenir les résultats suivants :



Ci-dessus : vue du dessus de la vitesse instantanée du vent en échelle de couleur (bleu : vitesse nulle, rouge : vitesse maximale). Les vitesses maximales en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ sont relevées à gauche le long de l'axe horizontal correspondant. L'échelle correspondant à 1 km est indiquée sur le graphique. Le déplacement global de la tornade se fait de la gauche vers la droite sur le schéma à la vitesse $V_t = 7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

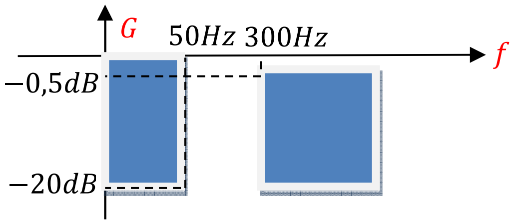
1) Justifier que le champ des vitesses est du type $\vec{v} \approx v(r)\overrightarrow{u_\vartheta}$ en repérage cylindrique.
2) Il existe une valeur de $r = R$ telle que pour $r \leq R$ on a $\overrightarrow{rot}\vec{v} = 2\vec{\Omega}$ (Ω constante non nulle jusqu'à $r = R$) et pour $r \geq R$ on a $\overrightarrow{rot}\vec{v} = \vec{0}$. Estimer, en le justifiant, la valeur de R.

Donnée :

$$\overrightarrow{rot}\vec{a}(M) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial a_z}{\partial \vartheta} - \dfrac{\partial a_\vartheta}{\partial z} \\ \dfrac{\partial a_r}{\partial z} - \dfrac{\partial a_z}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial r a_\vartheta}{\partial r} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial a_r}{\partial \vartheta} \end{pmatrix}$$

<u>Exercice 1 :</u>

Le gabarit d'un tel filtre présente l'allure suivante :



On exige donc une pente de plus de 20dB par décade : il faut au moins un ordre 2.
La fonction de transfert du circuit RLC est :

$$\underline{T} = \frac{jLw}{R + jLw + \frac{1}{jCw}} = \frac{j^2LCw^2}{1 + RjCw + j^2LCw^2} = \frac{\left(\frac{jw}{w_0}\right)^2}{1 + \frac{jw}{Qw_0} + \left(\frac{jw}{w_0}\right)^2}$$

Donc, par identification : $w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Qw_0 = \frac{1}{RC}$ soit $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

On fixe donc $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ alors :

$$G(x) = 20log\left(\frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)^2 + 2x^2}}\right) = 20log\left(\frac{x^2}{\sqrt{1+x^4}}\right) = 20\log\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}\right)$$

$$G(x) = -20\log\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\right) = -10\log\left(1+\frac{1}{x^4}\right)$$

Et on a la pulsation pour laquelle ce gain est de -20dB soit $\log\left(1+\frac{1}{x^4}\right) = 2$, $x \approx 0{,}3$ soit $f_0 = \frac{50}{0.3} = 166Hz$ et donc avec $C = 1\mu F$ on a $L = 0{,}9H$

Exercice 2 : Modélisation d'une tornade

Le champ des vitesses semble présenter une relative indépendance vis-à-vis du paramètre θ. Il est en revanche, clairement fonction de la distance radiale r. Ensuite le caractère orthoradial est celui qui va rendre compte d'un fluide tournant autour d'un axe vertical (ici en mouvement à la vitesse $V_t = 7m/s$) : $\vec{v} \approx v(r)\overrightarrow{u_\theta}$ car V_t est bien négligeable.

On peut trouver l'expression des champs des vitesses avec les modèles proposés :

- $r \leq R$ alors $2\pi r v = \Omega \pi r^2$ et $\vec{v} \approx \frac{\Omega r}{2}\overrightarrow{u_\theta}$
- $r \geq R$ alors $2\pi r v = \Omega \pi R^2$ et $\vec{v} \approx \frac{\Omega R^2}{2\pi r}\overrightarrow{u_\theta}$

On a donc deux modèles :

- $r \leq R$: le champ des vitesses croît
- $r \geq R$: le champ des vitesses décroît

Donc $R \approx 1km$