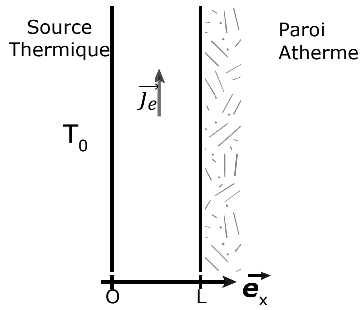
CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Thermodynamique

On considère une plaque métallique infinie d'épaisseur L, de conductivité électrique γ, de conductivité thermique λ, et normale à la direction $\mathbf{e}_x$.
Cette plaque est traversée par un courant électrique uniforme de densité volumique $\overrightarrow{J_e}$ orienté selon l'axe Oz.



Au niveau de la cote x = L, la plaque est recouverte d'un isolant thermique que nous considèrerons comme une paroi athermane.
Au niveau de la cote x = 0, la plaque est au contact d'une source thermique réelle dont la température vaut T_0.
On étudie le fonctionnement du dispositif en régime stationnaire pour lequel la température $T(x)$ dans la plaque est telle que $T(x) > T_0$.

1) Un courant thermique prend place au sein du matériau, préciser le sens et l'orientation de ce courant.
2) En effectuant un bilan thermique sur un système que vous prendrez soin de définir, trouver l'équation liant les fluctuations spatiales de la température T à $\overrightarrow{J_e}$.
3) A l'aide des conditions aux limites, déterminer l'expression de la fonction T(x). En déduire l'expression de $\overrightarrow{J_{th}}(x)$ densité de flux thermique.
4) Représenter l'allure $T(x) - T_0$ et de la norme de $\overrightarrow{J_{th}}(x)$
5) Application numérique : pour une plaque en cuivre $\gamma = 10^7 S/m$ et $\lambda = 100 W.m^{-1}.K^{-1}$, d'épaisseur L = 4 mm, traversée par un courant volumique $j_e = 10^5 A.m^{-2}$, déterminer $T(L) - T_0$. Conclure.

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Corrigé

1) Les invariances du problème conduit à $T(x,y,z) = T(x)$. On arrive à une situation où $T(x) > T_0$ pour expliquer une compensation entre flux thermique de conduction et la puissance dissipée par effet joule dans le matériau. Donc $\overrightarrow{j_{th}} = -\lambda \overrightarrow{grad}T = -\lambda \frac{dT}{dx}\overrightarrow{u_x}$ avec $\frac{dT}{dx} > 0$

2) On va prendre un parallélépipède de volume $d\tau = dxddydz$. Effectuons un bilan enthalpique :

$$dH(M,t+dt) - dH(M,t) = \frac{\partial dH}{\partial t}dt = 0 = |\delta\phi_e| - |\delta\phi_s|$$

$$Soit : |\delta\phi_e| = |\delta\phi_s|$$

$$\lambda\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x+dx} dydz + \frac{j_e^2}{\gamma}dxdydz = \lambda\left(\frac{dT}{dx}\right)_x dydz$$

$$\frac{d^2T}{dx^2} = -\frac{j_e^2}{\lambda\gamma}$$

3) On a deux conditions aux limites : $T(0) = T_0$ et $\left(\frac{dT}{dx}\right)_L = 0$

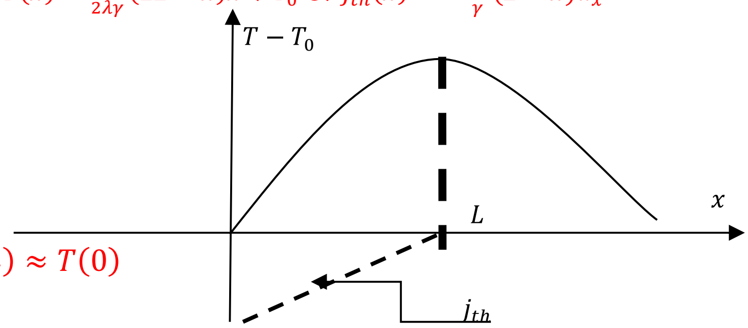
On rappelle que la continuité de la température est essentielle pour assurer une valeur finie du flux thermique et que la continuité du flux s'impose lorsque l'on considère un volume dont on fait tendre l'épaisseur vers zéro $\phi_e - \phi_s = (j_e - j_s)S = \frac{\partial j}{\partial x}dxS \to 0$

Il faut donc résoudre l'équation $\frac{d^2T}{dx^2} = -\frac{j_e^2}{\lambda\gamma}$ soit : $T(x) = -\frac{j_e^2}{2\lambda\gamma}x^2 + k_1x + k_2$

Donc $k_2 = T_0$ et $0 = -\frac{j_e^2 L}{\lambda\gamma} + k_1$

Soit $T(x) = \frac{j_e^2}{2\lambda\gamma}(2L - x)x + T_0$ et $\overrightarrow{j_{th}}(x) = -\frac{j_e^2}{\gamma}(L-x)\overrightarrow{u_x}$

4)



5) $T(L) \approx T(0)$