CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

EM

On considère une situation dans laquelle le champ électrique s'écrit : $\vec{E}(x,t) = E_0\, cos(\omega t - kx)\, \overrightarrow{e_x}$

1) Caractériser l'onde électromagnétique. Est-elle analogue à un type d'onde rencontré dans le vide ?
2) En déduire l'expression du champ d'induction magnétique $\vec{B}(x,t)$.
3) Puis calculer séparément les densités de charge ρ(x, t) et de courant $\vec{j}(x,t)$ et vérifier la relation qui les lie.

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Corrigé

On considère une situation dans laquelle le champ électrique s'écrit : $\vec{E}(x,t) = E_0 \cos(\omega t — kx)\,\overrightarrow{e_x}$

1) Il s'agit d'une plane progressive harmonique polarisée rectilignement mais, contrairement au cas usuel, longitudinale. Il ne peut donc s'agir d'une onde plane progressive (somme d'OPPH) se propageant dans le vide. En effet $div\vec{E} = 0$ appliqué à toutes les composantes imposent un champ traverse à la direction de propagation.
2) Pour obtenir le champ magnétique, on utilise l'équation de Mawxell-Faraday qui impose un champ magnétique nul.
3) Avec Maxwell-Gauss, $div\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} = +kE_0 \cos(\omega t — kx) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ donc $\rho = k\varepsilon_0 E_0 \cos(\omega t — kx)$. On trouve le vecteur densité de courant volumique avec Maxwell-Ampère : $\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$ soit : $\vec{j} = -\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \varepsilon_0\omega E_0 \cos(\omega t — kx)$
Ces deux sources doivent vérifier l'équation de conservation de la charge :
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\vec{j} = -k\varepsilon_0 E_0\,\omega \sin(\omega t — kx) + k\varepsilon_0\omega E_0 \sin(\omega t — kx) = 0$$