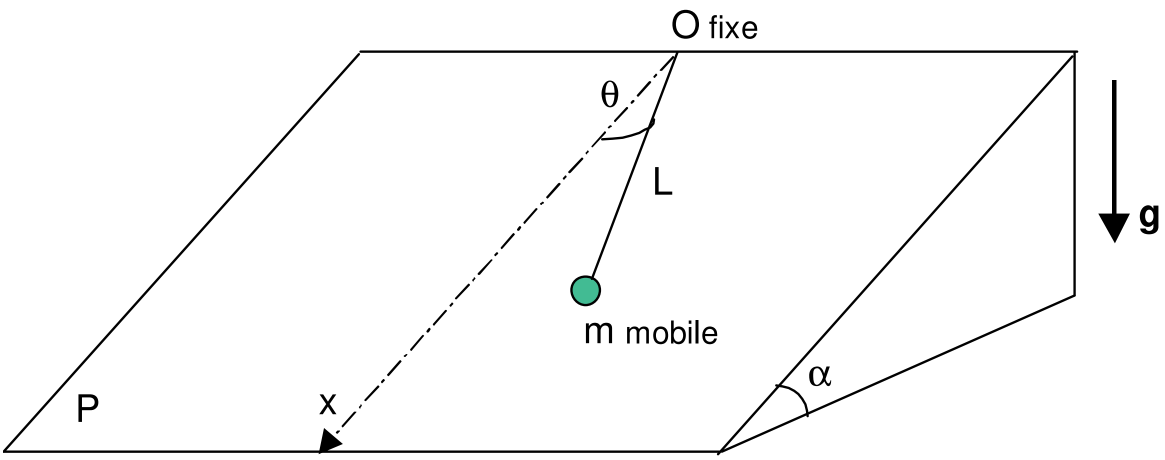
CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mécanique

Un pendule simple est constitué d'un fil de longueur L dont une extrémité O est fixée sur un plan incliné P faisant un angle α avec l'horizontale. A l'autre extrémité du fil est fixée une masse m en contact sans frottement avec le plan incliné P.

Le fil est constamment tendu, et on repère la position du pendule par l'angle θ qu'il fait avec l'axe Ox, correspondant à la direction de plus grande pente du plan incliné. Les orientations sont telles que θ est positif sur la figure ci-dessous.

a) Faire le bilan des forces qui agissent sur la masse m. Quelle propriété particulière vérifie son énergie mécanique E_m? Exprimer E_m en fonction de m, g, L, α, θ.
b) Etablir l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$.
c) Déterminer la période des oscillations dans le cas où θ reste très « petit ».
Analyser les situations limites pour les valeurs extrêmes de α.



CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Corrigé

a) $\vec{R}+\vec{T}+\vec{P}$, ce système est conservatif car la tension et la réaction du support (seules forces éventuellement non conservatives) ne travaillent pas.
La difficulté en de trouver la côte verticale du mobile, soit :

$$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{u_z}=L\overrightarrow{u_r}.\overrightarrow{u_z}=L\begin{pmatrix}cos\theta\\sin\theta\end{pmatrix}\begin{matrix}\vec{u}_x\\\vec{u}_y\end{matrix}.\overrightarrow{u_z}=Lcos\theta\vec{u}_x.\vec{u}_z=-Lcos\theta sin\alpha$$

Et donc $E_m=\frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2-mgLsin\alpha cos\theta$

b) D'après le TEM : $\ddot{\theta}+\frac{g}{L}sin\alpha sin\theta=0$

c) Et donc pour des petits angles, on obtient ; $\ddot{\theta}+\frac{g}{L}sin\alpha\theta=0$
On retrouve le cas du pendule simple pour $\alpha=\frac{\pi}{2}$ et pas d'oscillation si le dispositif est horizontal