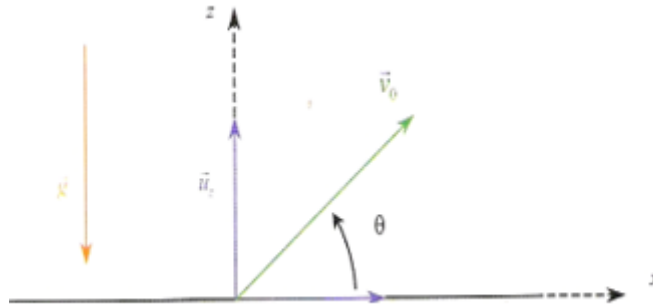


Parabole de sécurité

Une masse m supposée ponctuelle est lancée depuis le sol terrestre avec un angle θ par rapport à l'horizontale et une vitesse $v_0 = 10 \text{ m.s}^{-1}$.



1) Tracer différentes trajectoires en faisant varier l'angle θ_0 de 0 à 90° par pas de 10° La simulation précédente permet de distinguer trois cas :

- Les points atteints par la masse pour deux angles θ_0 différents
- Les points atteints par la masse pour un seul angle θ_0
- Les points non atteints par la masse

2) Tracer la parabole de sécurité c'est-à-dire la courbe distinguant les points atteints et non atteints par la masse m

On peut alors écrire la 2e loi de Newton : $m\vec{a} = m\vec{g}$ Que l'on peut projeter dans la base choisie :

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \text{ D'où : } \begin{pmatrix} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{pmatrix} \text{ on en déduit alors à cette que le mouvement sera indépendant de la masse ! Ensuite on peut faire une première intégration en tenant compte de la condition initiale sur la vitesse. } \vec{v}(0) = \vec{v}_0 \begin{pmatrix} \dot{x}(t) = v_0 \cos \vartheta \\ \dot{z}(t) = -gt + v_0 \sin \vartheta \end{pmatrix}$$

Une nouvelle intégration et l'utilisation de la condition initiale sur la position $\vec{OM}(0) = \vec{0}$ nous donne les

$$\text{équations horaires : } \begin{cases} x(t) = v_0 \cos(\vartheta)t & (1) \\ z(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0 \sin(\vartheta)t & (2) \end{cases}$$

On peut alors avoir rapidement l'équation de la trajectoire, en remarquant que l'équation (1) nous donne l'expression du temps en fonction de l'abscisse. En injectant cette expression dans (2)

$$\left(\begin{array}{l} t = \frac{x}{v_0 \cos(\vartheta)} \\ z = -\frac{g}{2} \left(\frac{x}{v_0 \cos(\vartheta)} \right)^2 + v_0 \sin(\vartheta) \frac{x}{v_0 \cos(\vartheta)} \end{array} \right) \text{ Soit : } z(x) = -\frac{g}{2} \left(\frac{x}{v_0 \cos(\vartheta)} \right)^2 + \tan(\vartheta)x$$

En utilisant la relation trigonométrique suivante : $\cos^2 \vartheta = \frac{1}{1+\tan^2 \vartheta}$ Alors

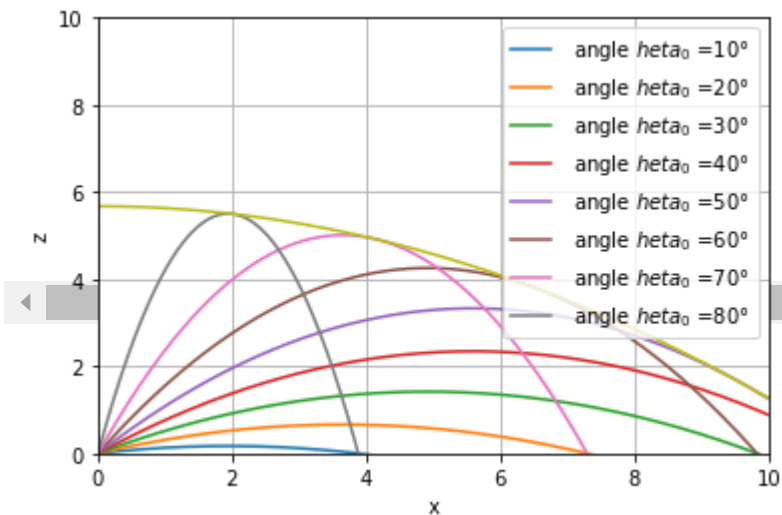
$$z_i(x_i) = -\frac{g}{2} \left(\frac{x_i}{v_0} \right)^2 (1 + \tan^2 \vartheta) + \tan(\vartheta)x_i \frac{g}{2} \left(\frac{x_i}{v_0} \right)^2 \tan^2 \vartheta - \tan \vartheta x_i + \left(\frac{g}{2} \left(\frac{x_i}{v_0} \right)^2 + z_i(x_i) \right) = 0 \tan^2 \vartheta -$$

Le calcul du discriminant donne : $\Delta = 2v_0^2 g x_i^2 - 4(1 + 2v_0^2 z_i(x_i) g x_i^2)$ C'est donc la solution unique

associée à un discriminant nul qui va définir la parabole de sûreté, soit : $z_i(x_i) = \left(\left(\frac{v_0^2}{g} \right)^2 - 1 \right) \frac{gx_i^2}{2v_0^2}$ Soit

Entrée [13]:

```
1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import numpy as np
3 v0=10
4 g=8.81
5 for i in range(10,90,10):
6     x=np.arange(0,10,0.01)
7     z=-0.5*g*(x/(v0*np.cos(i*np.pi/180)))**2+np.tan(i*np.pi/180)*x
8     plt.plot(x,z, label=" angle $ \theta_0 $ ={}°".format(i))
9     plt.legend()
10 plt.plot(x,v0**2/(2*g)-g*x**2/(2*v0**2), label=" angle $ \theta_0 $ ={}°".format(90))
11 plt.xlabel("x")
12 plt.ylabel("z")
13 plt.axis([0,10,0,10])
14 plt.grid()
15 plt.show()
16
```



Entrée []:

1

Entrée []:

1