

Mouvement d'un Punching-Ball

On s'intéresse ici à l'étude du mouvement d'un punching-ball ci-contre, utilisé lors des entraînements des boxeurs. Le mouvement du punching-ball peut-être décrit à l'aide de l'angle θ que forme la barre métallique reliant le socle immobile à la zone frappée, par rapport à la verticale. Ce punching-ball constitue un pendule inversé, maintenu autour de sa position d'équilibre verticale grâce à un couple de rappel proportionnel à l'angle θ . Il subit en outre un couple de frottement fluide proportionnel à sa vitesse de rotation.

Lorsqu'un boxeur frappe la partie supérieure du punching-ball, celui-ci oscille plusieurs fois avant de se stabiliser à nouveau.

Q1. En introduisant les grandeurs et hypothèses nécessaires, montrer que l'angle θ est soumis, juste après la frappe du joueur, à une équation du type :

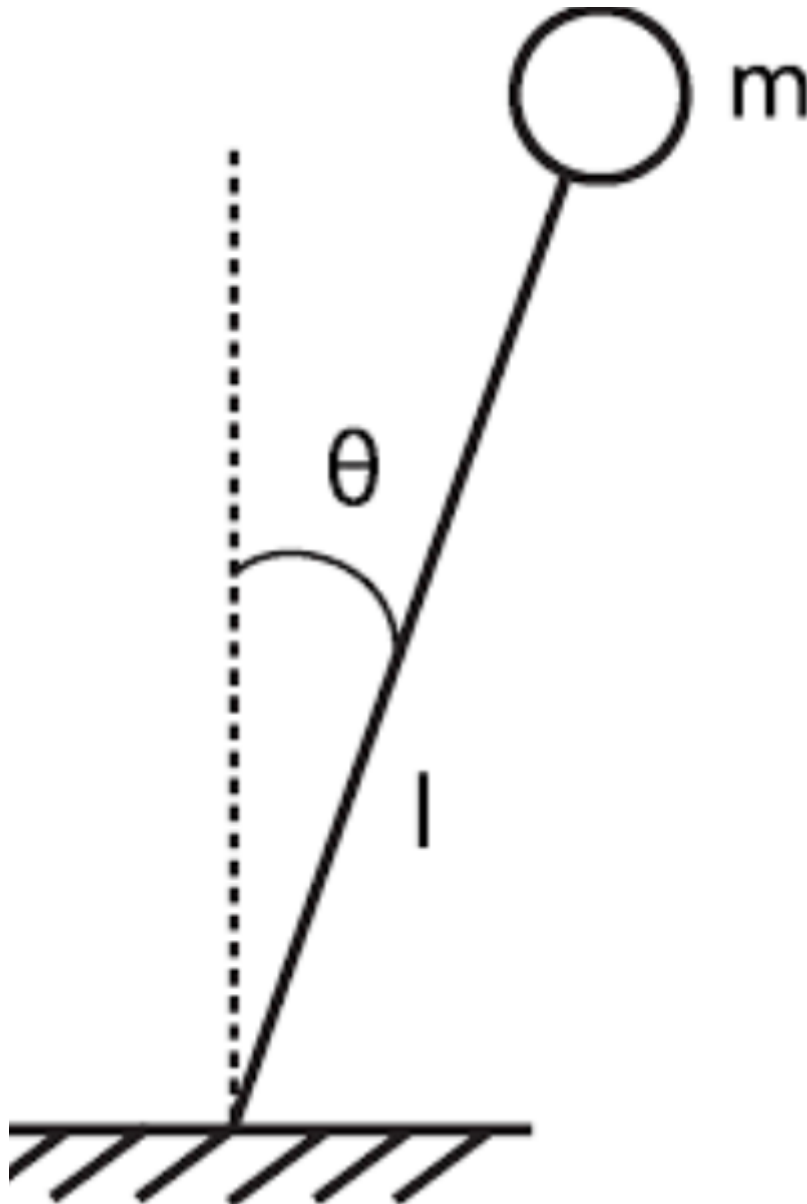
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + b\frac{d\theta}{dt} + c\theta = d \sin(\theta)$$

où on exprimera b, c et d en fonction des paramètres introduits.

La résolution de cette équation nécessite de définir des conditions initiales.

On est mécaniquement sur la situation suivante :





On a donc un solide (décrit en polaire) :

- avec un mouvement d'oscillation (vraisemblablement) plan
- avec un moment d'inertie pour la tige et pour la masse notons $J \frac{Ml^2}{I} 2 + ml^2$ le moment d'inertie de l'ensemble (a priori le moment de la tige est ignoré par la suite)
- un moment du poids appliqué au centre de masse G qui : $(M + m)OGg \sin(\theta)$
- un moment des forces de rappel : $-k\theta$
- un moment lié au frottement : $-h \frac{d\theta}{dt}$ L'application du théorème du moment cinétique projeté suivant z donne :

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + h \frac{d\theta}{dt} + k\theta = (M + m)OGg \sin(\theta)$$

Par jeu d'identification, on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \frac{h}{J} \\ b = \frac{k}{J} \\ c = \frac{(M+m)OGg}{J} \end{array} \right.$$

Q2. Proposer ainsi des conditions initiales cohérentes avec la situation physique étudiée.

Q3. Montrer que la position d'équilibre initiale du pendule n'est stable que si le coefficient de rappel k est supérieur à une certaine valeur dont on donnera l'expression.

Donnée :

Si le mouvement d'un système autour d'une position d'équilibre est régi par une équation du type :

$$\alpha f''(t) + \beta f'(t) + \gamma f(t) = \delta$$

(où α, β, γ et δ sont des constantes réelles)

Alors, pour que la position d'équilibre de ce système soit stable, il faut que α, β et γ soient de même signe.

Le sujet semble vouloir proposer $\theta(0) = 0$ et $\omega(0) = \omega_0$. La position d'équilibre initiale est la verticale, imaginons que l'on s'écarte un peu de cette situation $\omega = 0 + \epsilon$ alors l'équation différentielle devient :

$$J \frac{d^2 \epsilon}{dt^2} + h \frac{d\epsilon}{dt} + (k - (M + m)OGg) \epsilon = 0$$

Comme le précise le sujet, il faut que $k - (M + m)OGg > 0$ et donc $k > (M + m)OGg$

On donne les fonctions suivantes qu'il conviendra d'utiliser sans les modifier par la suite.

In [2]:

```

1  from math import*
2  import numpy as np
3  import matplotlib.pyplot as plt
4
5  def F(theta,thetapoint):
6      h=1
7      k=30
8      m=1
9      l=1.5
10     J=m*l*l
11     g=10
12     x=m*g*l/J*sin(theta)-k/J*theta-h/J*thetapoint
13     return thetapoint,x
14
15
16
17  def F2(theta,thetapoint):
18      h=1
19      k=13
20      m=1
21      l=1.5
22      J=m*l*l
23      g=10
24      x=m*g*l/J*sin(theta)-k/J*theta-h/J*thetapoint
25      return thetapoint,x
26
27  def Euler(F,Texp,dt,v):
28      l=1.5
29      theta=[0]
30      thetapoint=[v/l]
31      t=[0]
32      N=int(Texp/dt)
33      for i in range(N-1):
34          a,b=F(theta[-1],thetapoint[-1])
35          if theta[-1]+a*dt>3.14/2 or theta[-1]+a*dt<-3.14/2 :
36              theta.append(theta[-1])
37              thetapoint.append(-thetapoint[-1])
38              t.append((i+1)*dt)
39          else :
40              theta.append(theta[-1]+a*dt)
41              thetapoint.append(thetapoint[-1]+b*dt)
42              t.append((i+1)*dt)
43      return t,theta,thetapoint
44
45  def portrait(v):
46      t,theta,thetapoint=Euler(F,25,0.001,v)
47      plt.close()
48      plt.figure()
49      plt.plot(theta,thetapoint)
50      plt.xlabel("Theta (rad)")
51      plt.ylabel("d Theta / dt (Rad/s)")
52      plt.title("Portrait de phase")
53      plt.grid()
54      plt.show()
55
56  def portrait2(v):
57      t,theta,thetapoint=Euler(F2,25,0.001,v)
58      plt.close()
59      plt.figure()

```

```

60 plt.plot(theta, thetapoint)
61 plt.xlabel("Theta (rad)")
62 plt.ylabel("d Theta / dt (Rad/s)")
63 plt.title("Portrait de phase")
64 plt.grid()
65 plt.show()
66

```

Q4 Expliquer brièvement la méthode de Cauchy pour résoudre des équations différentielles de degré $n = 2$.

L'idée est de se ramener à la résolution d'équation différentielle d'ordre 1 On va poser le problème sous la forme d'un problème de Cauchy : $\vec{X} = \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$ et $\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{F}$, soit ici :

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix}$$

et :

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ -h\frac{d\theta}{dt} - k\theta + (M + m)OGg\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

Q5 Apporter des "doc string" à chaque fonction afin de mieux apprécier leur intérêt.

In [10]:

```

1  from math import*
2  import numpy as np
3  import matplotlib.pyplot as plt
4
5  def F(theta,thetapoint):
6      """Renvoie la fonction vectorielle F définie dans le formalisme de Cauchy
7      Ici  $w_0=(k/J)^{0.5}=3.6\text{rad/s}$ 
8      et  $M=h/(2w_0J)=0.06$  soit  $M<1$ 
9      A noter  $k = 30$  et  $mOG\ g = 30/2$  donc la verticale est une position d'équil
10     h=1
11     k=30
12     m=1
13     l=1.5
14     J=m*l*l
15     g=10
16     x=m*g*l/J*sin(theta)-k/J*theta-h/J*thetapoint
17     return thetapoint,x
18
19
20
21  def F2(theta,thetapoint):
22      """Renvoie la fonction vectorielle F définie dans le formalisme de Cauchy
23      Ici  $w_0=(k/J)^{0.5}=2.4\text{rad/s}$ 
24      et  $M=h/(2w_0J)=0.1$  soit  $M<1$ 
25      A noter  $k = 13$  et  $mOG\ g = 30/2$  donc la verticale n'est pas une position
26     h=1
27     k=13
28     m=1
29     l=1.5
30     J=m*l*l
31     g=10
32     x=m*g*l/J*sin(theta)-k/J*theta-h/J*thetapoint
33     return thetapoint,x
34
35  def Euler(F,Texp,dt,v):
36     l=1.5#pas utile
37     theta=[0]#condition initiale sur la position angulaire
38     thetapoint=[v/l]#vitesse angulaire initiale avec v la vitesse du "coup"
39     t=[0]#initialistaion du temps
40     N=int(Texp/dt)#nbre d'échantillons
41     for i in range(N-1):
42         a,b=F(theta[-1],thetapoint[-1])#valeurs des instants ti
43         if theta[-1]+a*dt>3.14/2 or theta[-1]+a*dt<-3.14/2 :#cas où l'objet e
44             theta.append(theta[-1])#on le laisse au sol (pas d'effet de rebor
45             thetapoint.append(-thetapoint[-1])#on le laisse au sol
46             t.append((i+1)*dt)
47         else :
48             theta.append(theta[-1]+a*dt)#schema d'euler explicite
49             thetapoint.append(thetapoint[-1]+b*dt)#idem
50             t.append((i+1)*dt)
51     return t,theta,thetapoint
52
53  def portrait(v):
54      """tracé du portait de phase"""
55     t,theta,thetapoint=Euler(F,25,0.001,v)#on laisse v en variable avec F
56     plt.close()
57     plt.figure()
58     plt.plot(theta,thetapoint)
59     plt.xlabel("Theta (rad)")

```



```

60     plt.ylabel("d Theta / dt (Rad/s)")
61     plt.title("Portrait de phase")
62     plt.grid()
63     plt.show()
64
65     def portrait2(v):
66         t,theta,thetapoint=Euler(F2,25,0.001,v) #on laisse v en variable avec F2
67         plt.close()
68         plt.figure()
69         plt.plot(theta,thetapoint)
70         plt.xlabel("Theta (rad)")
71         plt.ylabel("d Theta / dt (Rad/s)")
72         plt.title("Portrait de phase")
73         plt.grid()
74         plt.show()
75

```

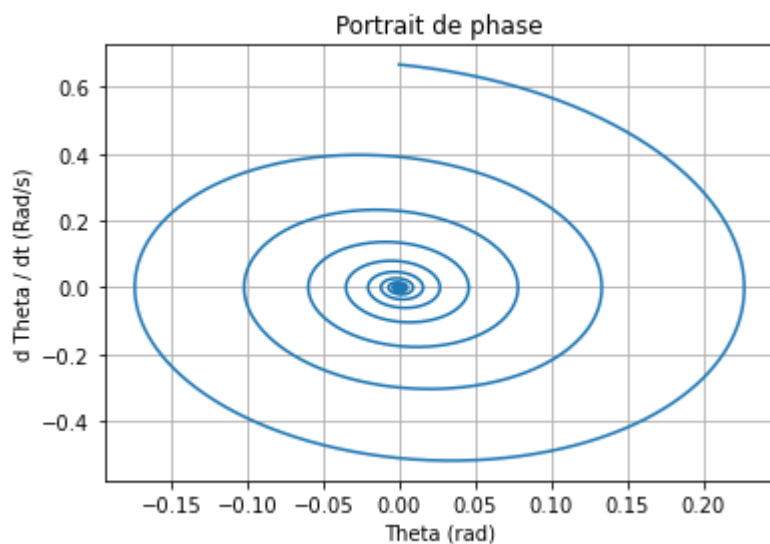
Q6 Tracer les portraits dans différentes situations

In [12]:

```

1  #petit coup de poing et M =0.06 et la verticale position d'équilibre
2  portrait(1)
3

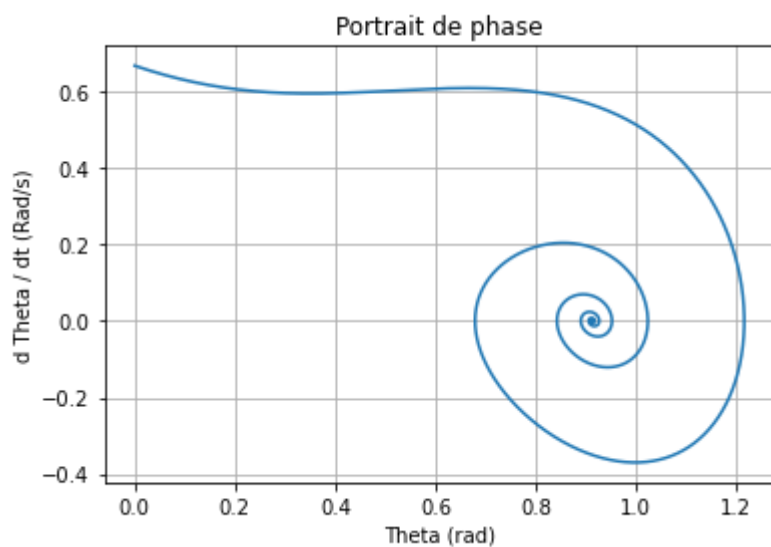
```



On a un système qui reste autour de sa position d'équilibre (k suffisant par rapport au poids)

In [13]:

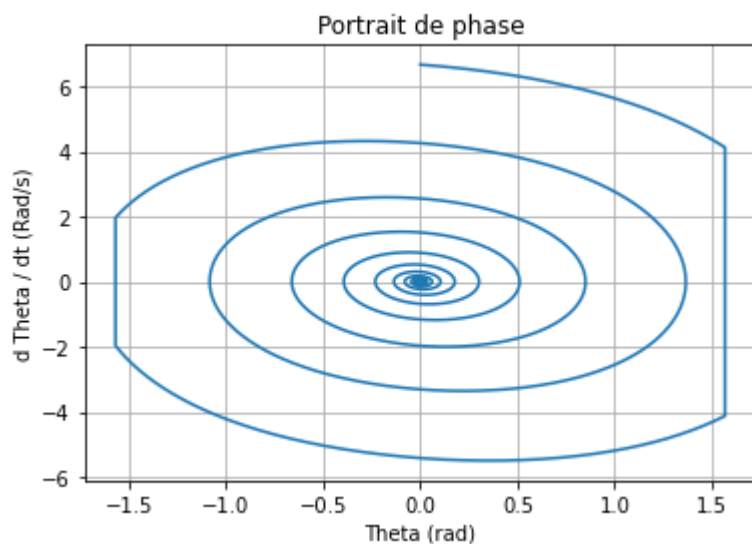
```
1 #petit coup de poing et M=0.1 la verticale n'est pas une position d'équilibre
2 portrait2(1)
```



Le mobile ne reste pas à la verticale (position instable) mais a 60° (à peu près) et oscille autour de cette position

In [14]:

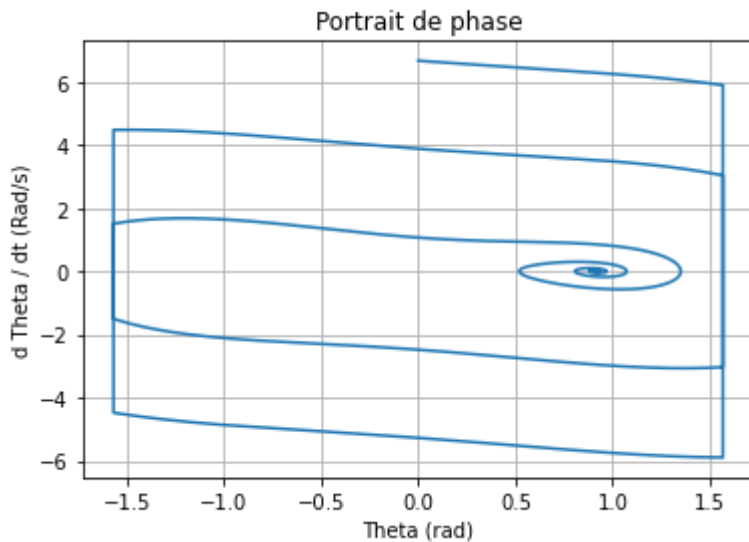
```
1 #gros coup de poing et M =0.06 et la verticale position d'équilibre
2 portrait(10)
```



Le mobile touche le sol et la force de rappel finit par ramèner le mobile à la verticale

In [16]:

```
1 #gros coup de poing et M =0.1 et la verticale n'est pas une position d'équilibre
2 portrait2(10)
```



In []:

```
1 Le mobile touche le sol des deux côtés avant de revenir à 60°
```

En réalité, suite à une frappe du boxeur, les oscillations du punching-ball restent limitées à des angles « faibles ». Toutefois, si le frappeur répète sa frappe régulièrement, l'amplitude des oscillations peut alors parfois considérablement augmenter.

Q5. Comment s'appelle ce phénomène ? Donner une expression de l'ordre de grandeur de la durée entre deux frappes pour qu'il se produise.

Il s'agit du phénomène de résonance. Pour un amortissement faible, ce temps est la période propre