CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Electromagnétisme

1) Que constate-t-on lorsqu'on essaie de calculer l'énergie électrostatique d'une charge q ponctuelle (donc sans dimension) en utilisant la densité d'énergie électrique ?
2) Reprendre le calcul pour un électron assimilé à une petite sphère de rayon r_e en supposant sa charge q = —e uniformément répartie dans ce volume.
3) En déduire la valeur numérique du rayon classique r_e de l'électron en assimilant cette énergie à $m_e c^2$; commentaire.

Données : On donne $m_e = 9{,}1.10^{-31} kg, e = 1{,}6.10^{-19} C, c = 3{,}0.10^8 ms^{-1}, \varepsilon_0 = 8{,}9.10^{-12} SI$

On utilise les coordonnées sphériques. Tous les plans contenant le point M et O sont des plans de symétrie donc le champ est radial $\vec{E} = E(r,\vartheta,\varphi)\overrightarrow{e_r}$. On a invariance pour toutes rotations autour de O de la distribution de charges : $\vec{E} = E(r)\overrightarrow{e_r}$
On propose très logiquement une sphère pour la surface de Gauss

- $r > R : \vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{e_r}$
- $r < R : \vec{E}(r) = \frac{Qr}{4\pi R^3\varepsilon_0}\overrightarrow{e_r}$

On a donc une énergie électrostatique totale :

$$U_e = \frac{\varepsilon_0}{2}\iiint_{r>R}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 r^2 sin\vartheta d\vartheta d\varphi dr + \iiint_{r<R}\left(\frac{Qr}{4\pi R^3\varepsilon_0}\right)^2 r^2 sin\vartheta d\vartheta d\varphi dr$$

$$U_e = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\left(\iiint_{r>R}\frac{1}{r^2}sin\vartheta d\vartheta d\varphi dr + \iiint_{r<R}\frac{r^4}{R^6}sin\vartheta d\vartheta d\varphi dr\right)$$

$$U_e = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 4\pi\left(\iiint_{r>R}\frac{1}{r^2}dr + \iiint_{r<R}\frac{r^4}{R^6}dr\right)$$

$$U_e = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 4\pi\left(\left[\frac{-1}{r}\right]_R^\infty + \left[\frac{r^5}{5R^6}\right]_0^R\right)$$

$$U_e = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 4\pi\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{5R}\right)$$

$$U_e = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 4\pi\left(\frac{6}{5R}\right) = \frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 R}$$

On a donc pour cette charge au repos une identification qui donne alors :

$$\frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 R} = mc^2$$

Soit :

$$R = \frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 mc^2} \approx 1{,}7 fm$$