

Modèle du gaz parfait :

Tracer l'allure des diagrammes de Clapeyron $P(V)$ suivi un gaz parfait dans les situations suivantes :

	Isochore	Isobare	Isotherme	Adiabatique + mécaniquement réversible
Chauffage				
Refroidissement				
Compression				
Détente				

Différentielle totale exacte et forme différentielle :

Soit $f(x, y) = x^2 + 2xy$

- 1) Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$
- 2) Calculer $\frac{\partial f}{\partial y}$
- 3) Vérifier que $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$

Soit $d\psi = 2xydx + 4xydy$. Supposons que $\psi(x, y)$ existe :

- 1) Calculer $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)$
- 2) Calculer $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)$
- 3) Cette différentielle est associée à une unique fonction si $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)$. Est-ce le cas ?

Dérivée partielle

On montre que les paramètres d'état d'un système thermoélastique fermé vérifient :

$$\frac{\partial V}{\partial P} \times \frac{\partial P}{\partial T} \times \frac{\partial T}{\partial V} = -1$$

On considère une huile liquide associée à un coefficient de dilatation isobare α et de compressibilité isotherme χ_T .

- 1) Montrer que : $\left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)$ peut s'exprimer en fonction de α et χ_T .
- 2) L'huile étudiée remplit une ampoule scellée pouvant supporter une pression interne maximale de 10 bar. Quelle augmentation de température peut-elle supporter sachant que $\alpha = 10^{-4} K^{-1}$ et $\chi_T = 10^{-9} Pa^{-1}$?

Ordre de grandeur

- 1) Donner la dimension typique d'un atome
- 2) Donner la distance typique entre deux atomes d'un solide.
- 3) On considère un solide cristallin qui cristallise dans un cube d'arrête a . Il s'agit réseau cubique simple. En déduire la valeur de la masse volumique de ce solide si sa masse molaire $M = 10 g.mol^{-1}$

Modèle du gaz parfait :

Pour un GP	Isochore	Isobare	Isotherme	Adiabatique
Chauffage : $T_{ext} > T + Q > 0$			NON	NON
Refroidissement : $T_{ext} < T + Q < 0$			NON	NON
Compression : $P_{ext} > P \rightarrow \Delta P > 0 + \Delta V < 0$	NON	NON		
Détente : $P_{ext} < P \rightarrow \Delta P < 0 + \Delta V > 0$	NON	NON		

Différentielle totale exacte et forme différentielle :

Soit $f(x, y) = x^2 + 2xy$

- 1) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2y$
- 2) $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x$
- 3) $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = 2$

Soit $d\psi = 2xydx + 4xydy$.

- 1) $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = 2$
- 2) $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = 4$
- 3) $d\psi$ est ici une forme différentielle et pas une différentielle totale exacte.

Dérivée partielle et gaz parfait

$$\frac{\partial V}{\partial P} \times \frac{\partial P}{\partial T} \times \frac{\partial T}{\partial V} = -\frac{V\chi_T}{V\alpha} \frac{\partial P}{\partial T} = -1$$

Donc $\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{\alpha}{\chi_T} = 10^5 Pa.K^{-1}$ donc $\Delta T = 10 K$

Ordre de grandeur

- 1) Typiquement 100pm
- 2) Typiquement quelques 100pm.
- 3) $\rho = \frac{Nm}{V} = \frac{NM}{N_a V} = \frac{NM}{N_a a^3} = \frac{1 \times 10^{-2}}{10^{23} 10^{-30}} < 10^5 kg.m^{-3}$ (avec les approximations ce résultat est un peu trop grand)

Python et thermodynamique

- 1) Représenter les courbes $P(V)$ de trois isothermes à 300K, 400K et 500K suivies par une mole de gaz parfait dont le volume varie entre 1L et 10L. La pression sera affichée en bar et le volume en Litre.
- 2) Représenter la détente dans un diagramme de Clapeyron $P(V)$ d'une mole de gaz parfait initialement à 300K de 1L à 10L de manière isotherme et adiabatique mécaniquement réversible ($PV^\gamma = Cte$). On mettra $P(bar)$ et $V(L)$

Dérivée partielle

Soit une fonction $f(x, y) = 4xy + \ln(xy)$

- 1) Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$
- 2) Calculer $\frac{\partial f}{\partial y}$
- 3) Exprimer la différentielle df

Soit un gaz de n moles dont la fonction d'état est : $P(V - V_0) = nRT$ où V_0 est une constante, P la pression du gaz, T sa température et V son volume.

- 4) Exprimer la fonction $V(T, P)$. Interpréter quand $T = 0$
- 5) Exprimer la différentielle dV

Python et thermodynamique

Pour une isotherme : $P(bar) * 10^5 = \frac{RT}{V(L)*10^{-3}} \Rightarrow P(bar) = \frac{RT}{100V(L)}$

Pour une adiabatique : $PV^\gamma = P_0V_0^\gamma \Rightarrow P = \frac{P_0V_0^\gamma}{V^\gamma}$

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
question 1
V = np.linspace(1,10,100)
R=8.314
for i in [300,400,500]:
    plt.plot(V,R*i/(100*V),label="T={ } K".format(i))
    plt.legend()
plt.grid()
plt.xlabel("V(L)")
plt.ylabel("P(bar)")
plt.show()
question2
V = np.linspace(1,10,100)
plt.plot(V,R*300/(V*100),label="isotherme")
P0=R*300/(1*100)
V0=1
plt.plot(V,P0*V0**1.4/V**1.4,label="adiabatique")
plt.grid()
plt.legend()
plt.show()
```

Dérivée partielle

Soit une fonction $f(x, y) = 4xy + \ln(xy)$

- 1) $\frac{\partial f}{\partial x} = 4y + \frac{1}{x}$
- 2) $\frac{\partial f}{\partial y} = 4x + \frac{1}{y}$
- 3) Exprimer la différentielle $df = \left(4y + \frac{1}{x}\right) dx + \left(4x + \frac{1}{y}\right) dy$

Soit un gaz de n moles dont la fonction d'état est : $P(V - V_0) = nRT$ où V_0 est une constante.

- 4) $V(T, P) = \frac{nRT}{P} + V_0$ où rend compte du volume propre des particules
- 5) $dV = \frac{nR}{P} dT - \frac{nRT}{P^2} dP$

Equation différentiel

Une bouteille rigide de 10L remplie de gaz initialement à la pression P_0 se vide car elle n'est pas totalement étanche. Entre t et $t + dt$ la pression P diminue de $dP = -a(P - P_{ext})dt$ où $P_{ext} < P_0$ est la pression extérieure et $a = 0,1s^{-1}$.

- 1) Donner l'expression de l'équation différentielle vérifiée par $P(t)$.
- 2) A quel instant t_0 la pression dans le ballon est-elle égale à $1,5P_{ext}$ sachant que $P_0 = 2P_{ext}$? On donne $\ln(2) \approx 0,7$

Géométrie et calcul différentielle :

- 1) Donner la volume d'une sphère de rayon R
- 2) Donner la surface d'une sphère de rayon R
- 3) Donner le volume élémentaire d'une calotte sphérique d'épaisseur dR

Géométrie et calcul différentiel :

- 1) Donner la surface d'un disque de rayon R
- 2) Donner l'expression du périmètre d'un cercle de rayon R
- 3) Donner la surface d'un disque évidé d'épaisseur dR

Ordre de grandeur pour les gaz parfaits

- 1) Donner l'unité et un ordre de grandeur de la constante R des gaz parfaits.
- 2) Donner la valeur de la masse molaire M de l'air.
- 3) Ecrire l'équation des gaz parfaits vérifiée par $1kg$ de gaz. On note P la pression, v le volume de cet échantillon d' $1kg$ et T la température.
- 4) Calculer le volume massique v de l'air présent dans cette classe.
- 5) En déduire un ordre de grandeur de la masse volumique associée.

Equation différentiel

$$\frac{dP}{dt} + aP = a(P_{ext})$$

$$\text{Donc } P(t) = (P_0 - P_{ext})e^{-at} + P_{ext}$$

$$P(t_0) = (P_0 - P_{ext})e^{-at_0} + P_{ext} = 1,5P_{ext}$$

En sachant que $P_0 = 2P_{ext}$:

$$P(t_0) = P_{ext}e^{-at_0} + P_{ext} = 1,5P_{ext}$$

$$t_0 = 10 \ln(2) = 7s$$

Géométrie et calcul différentielle

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$S = 4\pi R^2$$

$$dV = SdR$$

Géométrie et calcul différentielle

$$S = \pi R^2$$

$$p = 2\pi R$$

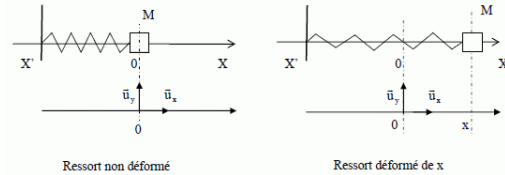
$$dS = p dR = 2\pi R dR$$

Ordre de grandeur pour les gaz parfaits

- 1) $R \approx 8,314J.K^{-1}mol^{-1}$.
- 2) $M = 0,2M_{O_2} + 0,8M_{N_2} = 28,8g.mol^{-1} \approx 30g.mol^{-1}$.
- 3) $Pv = \frac{RT}{M}$
- 4) $v \approx 1m^3.kg^{-1}$
- 5) $\rho = \frac{1}{v}$

Théorème d'Emmy Noether et lois de conservation

Le théorème d'Emmy Noether précise que si le Lagrangien d'un système physique présente une invariance alors il existe une grandeur physique associée qui se conserve. Pour illustrer le théorème d'Emmy Noether, on va considérer un système masse-ressort horizontal étudié dans un référentiel Galiléen :



La masse m est repérée par sa position x par rapport au repos (ressort à sa longueur à vide). On note $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ sa vitesse et $\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt}$ son accélération. Le ressort est de raideur k constante. Dans cet exercice nous supposons que la masse m est une fonction du temps.

- 1) Appliquer la 2^e loi de Newton et projeter cette équation suivant $\vec{u}_x$.
- 2) Donner l'expression de l'énergie cinétique $E_c(\dot{x}, t)$ en fonction des données du problème.
- 3) Donner l'expression de l'énergie potentielle élastique $E_p(x)$ en fonction des données du problème. On prendra $E_p(0) = 0$.

On définit le lagrangien L par $L(\dot{x}, x, t) = E_c(\dot{x}, t) - E_p(x)$

- 4) Exprimer $\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)_{\dot{x}, t}$ en fonction de k et x .
- 5) Exprimer $\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)_{x, t}$ puis $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)_{x, t}$
- 6) En déduire que $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)_{x, t} = \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)_{\dot{x}, t}$

Le résultat précédent peut aussi s'écrire en utilisant la quantité de mouvement $p = m\dot{x}$, ainsi $\frac{d}{dt} p = \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)_{\dot{x}, t}$

Ce résultat se généralise à tout système : Si le lagrangien d'un système est invariant par translation dans l'espace $\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)_{\dot{x}, t} = 0$ alors sa quantité de mouvement se conserve (on retrouve ici une autre formulation du principe d'inertie).

- 7) Donner l'expression de la différentielle dL en fonction des dérivées partielles de L .
- 8) En déduire que $\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) \dot{x} \right) + \left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)_{x, \dot{x}}$.
- 9) En déduire alors que $\frac{dE_m}{dt} = - \left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)_{x, \dot{x}}$

Ce résultat se généralise à tout système : si le lagrangien d'un système est invariant dans le temps t ($\frac{\partial L}{\partial t} = 0$) alors son énergie mécanique associée est conservée (on retrouve ici, une autre formulation du théorème de la puissance mécanique). On peut aussi démontrer que si le Lagrangien d'un système est isotrope alors son moment cinétique est conservé. Les lois de conservations (énergie, charge,) ne sont donc pas des postulats indépendants.

Dans ces conditions, on a :

- D'après la 2^e loi de Newton : $\frac{dp}{dt} = -kx$
- Expression de l'énergie cinétique : $E_c = \frac{1}{2} m(t) \dot{x}^2$
- Expression de l'énergie potentielle élastique : $E_p = \frac{1}{2} kx^2$
- Expression du lagrangien : $L(\dot{x}, x, t) = E_c(\dot{x}, t) - E_p(x) = \frac{1}{2} m(t) \dot{x}^2 - \frac{1}{2} kx^2$

On peut remarquer que $\frac{\partial L}{\partial x} = -kx$

Et que : $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dt} m\dot{x} = \frac{dp}{dt}$

D'où : $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x}$

On a alors : $dL = \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)_{\dot{x}, t} dx + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)_{x, t} d\dot{x} + \left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)_{x, \dot{x}} dt$

Et donc : $\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \ddot{x} + \left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)_{x, \dot{x}}$

Or, nous avons vu que : $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x}$

Donc : $\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) \dot{x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \ddot{x} + \left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)_{x, \dot{x}}$

Les propriétés du calcul de dérivée permettent d'écrire : $\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) \dot{x} \right) + \left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)_{x, \dot{x}}$

Soit :

$$\frac{d}{dt} \left(L - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) \dot{x} \right) = \left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)_{x, \dot{x}}$$

$$\frac{d}{dt} (L - 2E_c) = - \frac{dE_m}{dt} = \left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)_{x, \dot{x}}$$

Energie interne et calcul différentiel

Une molécule complexe a une énergie interne molaire $U(T) \approx aT + bT^2$ (avec $a, b > 0$ constants, T en kelvins).

- 1) Donner l'expression du différentiel dU .
- 2) Pour un échauffement de T_1 à T_2 ($T_2 > T_1$), calculer $\Delta U = U(T_2) - U(T_1)$.
- 3) Discuter l'unité de a et de b .

Dérivées partielles et différentielle

Soit $f(x, y) = x^2y + \exp(xy)$.

1. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.
2. Écrire la différentielle totale exacte df

Loi de Laplace et calcul différentiel

On donne la loi de Laplace $PV^\gamma = Cte$

- 1) Différentier la relation précédente
- 2) Exprimer $\frac{dP}{dV}$

Energie interne et calcul différentiel

- 1) $dU = (a + 2bT)dT$
- 2) $\int_1^2 dU = \Delta U = \int_1^2 a dT + \int_1^2 2bT dT = a(T_2 - T_1) + b(T_2^2 - T_1^2)$
- 3) $[a] = J.K^{-1}.mol^{-1}$ et $[b] = J.K^{-2}.mol^{-1}$

Dérivées partielles et différentielle

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + ye^{xy}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + xe^{xy}$$

$$df = (2xy + ye^{xy})dx + (x^2 + xe^{xy})dy$$

Loi de Laplace et calcul différentiel

$$d(PV^\gamma) = V^\gamma dP + P dV^\gamma = V^\gamma dP + P\gamma V^{\gamma-1} dV = 0$$

$$\text{Donc } \frac{dP}{dV} = -\gamma \frac{PV^{\gamma-1}}{V^\gamma} = -\frac{\gamma P}{V}$$

Energie interne d'un gaz réel, dérivée partielle et différentielle

Soit la fonction énergie interne $U(T, V)$ et la fonction entropie $S(T, V)$ des variables T et V .

- 3) Donner les expressions des différentielles dU et dS en fonction des dérivées partielles $\frac{\partial U}{\partial T}, \frac{\partial U}{\partial V}, \frac{\partial S}{\partial T}, \frac{\partial S}{\partial V}$
- 4) On rappelle l'identité thermodynamique $dU = TdS - pdV$ et on note $C_v = \frac{\partial U}{\partial T}$. Montrer que $dU = C_v dT + \left(T \frac{\partial S}{\partial V} - p\right) dV$
- 5) On définit la fonction énergie libre $F = U - TS$. Exprimer la différentielle en utilisant l'identité thermodynamique
- 6) En déduire que $\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{\partial S}{\partial V}$.
- 7) Montrer que pour un GP, on a $dU = C_v dT$
- 8) Montrer que pour un gaz réel vérifiant $\left(P + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$ on a

$$dU = C_v dT + \frac{n^2 a}{V^2} dV$$

- 9) Montrer que l'énergie interne d'une gaz parfait est

$$U(T, V) = U_0 + C_v T - \frac{n^2 a}{V}$$

Energie interne d'un gaz réel, dérivée partielle et différentielle

$$dU(T, V) = \frac{\partial U}{\partial T} dT + \frac{\partial U}{\partial V} dV = C_v dT + \frac{\partial U}{\partial V} dV \quad (1)$$

$$dS(T, V) = \frac{\partial S}{\partial T} dT + \frac{\partial S}{\partial V} dV \quad (2)$$

$$\text{Or } dU = TdS - pdV \quad (3)$$

Donc en mettant (2) dans (3) et par identification avec 1

$$dU = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} dT + \frac{\partial S}{\partial V} dV \right) - pdV$$

$$dU = C_v dT + \left(T \frac{\partial S}{\partial V} - p \right) dV \quad (4)$$

$$\text{Or si on construit : } F(T, V) = U(T, V) - TS(T, V)$$

$$\text{Alors } dF = dU - TdS - SdT = -pdV - SdT$$

$$\text{Donc cette différentielle implique : } \frac{\partial p}{\partial T} = \frac{\partial S}{\partial V} \quad (5)$$

$$\text{En mettant (5) dans (4): } dU = C_v dT + \left(T \frac{\partial p}{\partial T} - p \right) dV \quad (4)$$

$$\text{Pour GP: } T \frac{\partial p}{\partial T} = \frac{nRT}{V} = p \text{ et donc } dU = C_v dT$$

$$\text{Pour GR : } p = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{n^2 a}{V^2} \text{ donc } T \frac{\partial p}{\partial T} - p = \frac{n^2 a}{V^2}$$

$$dU = C_v dT + \frac{n^2 a}{V^2} dV$$

$$\text{Donc : } U(T, V) = C_v T + K(V) \text{ et } K'(V) = \frac{n^2 a}{V^2} \rightarrow K(V) = -\frac{n^2 a}{V} + Cte$$

$$U(T, V) = U_0 + C_v T - \frac{n^2 a}{V}$$

Différentielle et dérivée partielle

On considère l'équation d'état du modèle de Joule pour les gaz :

$$P(V, T) = \frac{nRT}{V - b}$$

- 1) Calculer $\frac{\partial P}{\partial V}$
- 2) Calculer $\frac{\partial P}{\partial T}$
- 3) Ecrire la différentielle dP

Différentielle et dérivée partielle

On donne l'énergie interne d'un gaz réel :

$$U(T, V) = C_V T - \frac{n^2 a}{V} + U_0$$

C_V, a, n, U_0 sont des constantes.

- 1) Calculer $\frac{\partial U}{\partial T}$
- 2) Calculer $\frac{\partial U}{\partial V}$
- 3) En déduire la différentielle dU

Différentielle et dérivée partielle

On donne l'équation d'état des gaz réels : $\left(P + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$ et on rappelle que $H = U + PV$ avec $U = C_V T - \frac{n^2 a}{V} + U_0$

Exprimer la différentielle dH en fonction de dV et dT

Différentielle et dérivée partielle

$$\frac{\partial P}{\partial V} = -\frac{nRT}{(V - b)^2} = -\frac{P}{V - b}$$

$$\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{nR}{V - b}$$

$$dP = \left(\frac{P}{V - b}\right)dV + \frac{nR}{V - b}dT$$

Différentielle et dérivée partielle

$$\frac{\partial U}{\partial T} = C_V$$

$$\frac{\partial U}{\partial V} = \frac{n^2 a}{V^2}$$

$$dU = C_V dT + \frac{n^2 a}{V^2} dV$$

Différentielle et dérivée partielle

$$dH = dU + PdV + VdP$$

Avec : $dU = C_V dT + \frac{n^2 a}{V^2} dV$ et :

$$\left(PV + \frac{n^2 a}{V} - nbP - \frac{n^3 ab}{V^2}\right) = nRT$$

$$PdV + VdP - \frac{n^2 a}{V^2} dV - nb dP + \frac{2n^2 ab}{V^3} dV = nR dT$$

$$dP = \frac{nR dT + \left(-P + \frac{n^2 a}{V^2} - \frac{2n^2 ab}{V^3}\right) dV}{V - nb}$$

Relation de Mayer

Soit la fonction énergie interne $U(T, V)$ et la fonction entropie $S(T, V)$ des variables T et V .

- 1) Donner les expressions des différentielles dU et dS en fonction des dérivées partielles $\frac{\partial U}{\partial T}, \frac{\partial U}{\partial V}, \frac{\partial S}{\partial T}, \frac{\partial S}{\partial V}$
- 2) On rappelle l'identité thermodynamique $dU = TdS - pdV$ et on note $C_v = \frac{\partial U}{\partial T}$. Montrer que $dU = C_v dT + \left(T \frac{\partial S}{\partial V} - p\right) dV$
- 3) On définit la fonction énergie libre $F = U - TS$. Exprimer la différentielle en utilisant l'identité thermodynamique
- 4) En déduire que $\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{\partial S}{\partial V}$.
- 5) En déduire également que $dH = C_p dT + \left(-T \frac{\partial V}{\partial T} + V\right) dP$ en utilisant la fonction enthalpie libre $G = H - TS$
- 6) On définit également $H = U + PV$, Montrer que

$$(C_p - C_v)dT = T \left(\frac{\partial p}{\partial T} dV + \frac{\partial V}{\partial T} dP \right)$$

- 7) En déduire la relation de Mayer :

$$(C_p - C_v) = T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \frac{\partial V}{\partial T} \right)$$

- 8) Appliquer aux GP

$$dU(T, V) = \frac{\partial U}{\partial T} dT + \frac{\partial U}{\partial V} dV = C_v dT + \frac{\partial U}{\partial V} dV (1)$$

$$dS(T, V) = \frac{\partial S}{\partial T} dT + \frac{\partial S}{\partial V} dV (2)$$

$$\text{Or } dU = TdS - pdV (3)$$

Donc en mettant (2) dans (3) et par identification avec 1

$$dU = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} dT + \frac{\partial S}{\partial V} dV \right) - pdV$$

$$dU = C_v dT + \left(T \frac{\partial S}{\partial V} - p \right) dV (4)$$

$$\text{Or si on construit : } F(T, V) = U(T, V) - TS(T, V)$$

$$\text{Alors } dF = dU - TdS - SdT = -pdV - SdT$$

$$\text{Donc cette différentielle implique : } \frac{\partial p}{\partial T} = \frac{\partial S}{\partial V} (5)$$

$$\text{En mettant (5) dans (4): } dU = C_v dT + \left(T \frac{\partial p}{\partial T} - p \right) dV (4)$$

$$dH(T, P) = \frac{\partial H}{\partial T} dT + \frac{\partial H}{\partial P} dP = C_p dT + \frac{\partial H}{\partial P} dP (1)$$

$$dS(T, P) = \frac{\partial S}{\partial T} dT + \frac{\partial S}{\partial P} dP (2)$$

$$\text{Or } dH = TdS + VdP (3)$$

Donc en mettant (2) dans (3) et par identification avec 1

$$dH = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} dT + \frac{\partial S}{\partial P} dP \right) + VdP$$

$$dH = C_p dT + \left(T \frac{\partial S}{\partial P} + V \right) dP (4)$$

$$\text{Or si on construit : } G(T, V) = H(T, V) - TS(T, V)$$

$$\text{Alors } dG = dH - TdS - SdT = VdP - SdT$$

$$\text{Donc cette différentielle implique : } \frac{\partial V}{\partial T} = -\frac{\partial S}{\partial P} (5)$$

$$\text{En mettant (5) dans (4): } dH = C_p dT + \left(-T \frac{\partial V}{\partial T} + V \right) dP (4)$$

$$\text{Or } H = U + PV$$

$$C_p dT + \left(-T \frac{\partial V}{\partial T} + V \right) dP = C_v dT + \left(T \frac{\partial p}{\partial T} - p \right) dV + d(PV)$$

$$(C_p - C_v)dT = \left(T \frac{\partial p}{\partial T} - p \right) dV - \left(-T \frac{\partial V}{\partial T} + V \right) dP + d(PV)$$

$$(C_p - C_v)dT = T \left(\frac{\partial p}{\partial T} dV + \frac{\partial V}{\partial T} dP \right)$$

Cette relation est vraie pour toute transformation, alors imaginons une transformation isobare alors $dV =$

$$\frac{\partial V}{\partial T} dT \text{ et } dP = 0 \text{ soit :}$$

$$(C_p - C_v) = T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \frac{\partial V}{\partial T} \right) \text{ si GP } (C_p - C_v) = T \left(\frac{nR}{V} \frac{nR}{P} \right) = nR$$

Coefficient thermoélastique

On donne la relation de Mayer valable pour tout système thermoélastique :

$$(C_p - C_v) = T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \frac{\partial V}{\partial T} \right)$$

- 1) Réécrire l'expression $(C_p - C_v)$ en fonction des coefficients de dilatation isobare et de compressibilité isotherme.
- 2) Traiter le cas d'un GP

Coefficient thermoélastique

L'étude de la propagation des ondes acoustiques est menée avec les hypothèses suivantes :

- L'air est assimilé à un gaz parfait
- Les surpressions et détente sont adiabatique et réversible et donc isentropique. On définit alors le coefficient de compressibilité isentropique $\chi_s = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_s$
- Les ondes acoustiques se propagent à la vitesse $c = \sqrt{\frac{1}{\rho \chi_s}}$

Montrer que $c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$

Coefficient thermoélastique

Montrer que les coefficients thermoélastiques vérifient : $\left(\frac{\partial \alpha}{\partial P} \right)_T = - \left(\frac{\partial \chi_T}{\partial T} \right)_P$

Coefficient thermoélastique

$$(C_p - C_v) = T \left(\frac{\partial p}{\partial T} V \alpha \right)$$

Or $\frac{\partial p}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial P} = -1$ donc $\frac{\partial p}{\partial T} = -\frac{\partial V}{\partial T} \frac{\partial P}{\partial V}$ soit :

$$(C_p - C_v) = T \left(-\frac{\partial V}{\partial T} \frac{\partial P}{\partial V} V \alpha \right) = T \left(V \frac{\alpha^2}{\chi_T} \right)$$

$$(C_p - C_v) = nR$$

Coefficient thermoélastique

On a donc $PV^\gamma = \text{cte}$ car entropie constante et donc $\left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_s = \left(\frac{\partial \frac{\text{cte}}{V^\gamma}}{\partial V} \right)_s = -\frac{\gamma \text{cte}}{V^{\gamma+1}} = -\frac{\gamma P}{V}$ donc $\chi_s = \frac{1}{\gamma P}$ Or $P = \frac{\rho RT}{M}$ d'où : $\chi_s = \frac{M}{\gamma \rho RT}$

Coefficient thermoélastique

$$V \alpha = \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \text{ Et } V \chi_T = - \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$$

L'égalité des dérivées croisées donne : $\left(\frac{\partial V \alpha}{\partial P} \right)_T = - \left(\frac{\partial V \chi_T}{\partial T} \right)_P$

$$V \left(\frac{\partial \alpha}{\partial P} \right)_T + \alpha \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = -V \left(\frac{\partial \chi_T}{\partial T} \right)_P - \chi_T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$$

$$V \left(\frac{\partial \alpha}{\partial P} \right)_T + \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = -V \left(\frac{\partial \chi_T}{\partial T} \right)_P + \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$$

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial P} \right)_T = - \left(\frac{\partial \chi_T}{\partial T} \right)_P$$

Coefficient de dilatation de l'air

Une montgolfière contient 3000 m³ d'air. On chauffe l'air de 20 °C à 100 °C à pression atmosphérique constante.

1. Calculer la variation relative de masse volumique de l'air.
2. Expliquer pourquoi la montgolfière s'élève.

Coefficient de compressibilité de l'eau :

Un plongeur descend à 30 m de profondeur (pression ≈ 4 bar). On donne le coefficient de compressibilité isotherme de l'eau $\chi_T = 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$. On note $\rho_0 = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ la masse volumique de l'eau en surface

1. Exprimer la χ_T en fonction de $\frac{\partial \rho}{\partial P}$
2. Calculer ρ à 30 m de profondeur.

Thermodynamique et python

On modélise un réacteur contenant un gaz parfait (n=1 mol, T=300 K). On fait varier la pression extérieure de 1 à 10 bar de manière isotherme.

1. Écrire un code qui trace le volume occupé en fonction de la pression.
2. Que devient la courbe si T=600 K ?

Thermodynamique et python

Un moteur effectue une compression isotherme de 10 $\rightarrow$ 2 L pour 0,5 mol de gaz à 350 K.

1. Calculer le travail par intégration analytique.
2. Vérifier le résultat par une intégration numérique avec Python

Coefficient thermoélastique

Un vérin contient 2,0 L d'huile ($\chi_T = 5 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$). Quelle surpression faut-il pour réduire le volume de 0,5 % ?

Coefficient de dilatation de l'air :

Si GP $\alpha = \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial T} = \frac{1}{m/\rho} \frac{\partial m/\rho}{\partial T} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T} = \frac{1}{T}$ donc $d \ln(\rho T) = 0$ et $\rho T = \rho_0 T_0$ on peut alors exprimer la variation relative : $\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = \frac{T_0 - T}{T} = -\frac{80}{373} \approx -\frac{8}{37} \approx -22.5\%$

Coefficient de compressibilité de l'eau

$\chi_T = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P} = -\frac{1}{m/\rho} \frac{\partial m/\rho}{\partial P} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P}$ soit $\frac{\Delta \rho}{\rho_0} = \Delta P \chi_T = 0,3\%$

Thermodynamique et python

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
question 1
V = np.linspace(1,10,100)
R=8.314
plt.plot(V,R*300/(100*V))#ou 600
plt.grid()
plt.xlabel("V(L)")
plt.ylabel("P(bar)")
plt.show()
```

Thermodynamique et python

```
V0=10
V = np.linspace(2,10,100)
W=-R*T*np.log(V[0]/V0)
P=R*T/(100*V)
plt.plot(V,P)
plt.grid()
plt.xlabel("V(L)")
plt.ylabel("P(bar)")
plt.show()
print(W) #4014J
def w(P,V):
    aire=0
    for i in range(len(V)-1):
        aire=aire+P[i]*10**5*((V[i+1]-V[i])*10**-3)
    return aire
print(w(P,V)) #4054J
```

Coefficient thermoélastique

$$\chi_T = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P} = -\frac{1}{V_0} \frac{\Delta V}{\Delta P} \rightarrow \Delta P = -\chi_T^{-1} \frac{\Delta V}{V_0} = 100 \text{ bar}$$