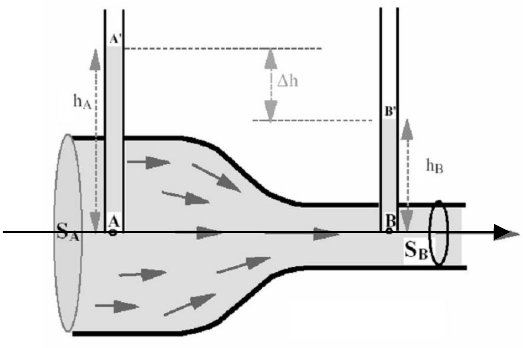
Ecoulement conservatif de fluides parfaits et incompressibles

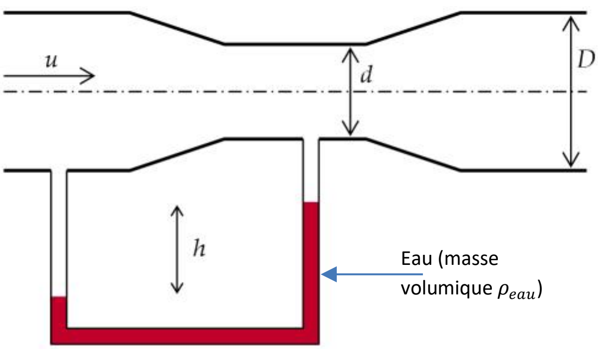
Exercice 1 : Débitmètre de venturi

Un écoulement stationnaire d'un fluide supposé parfait et incompressible de masse volumique ρ_0 s'établit entièrement dans une conduite horizontale de section variable (S_A en amont et S_B en aval) et percée de deux cheminées latérales. On pourra considérer que les champs des vitesses et des pressions sont uniformes sur chaque section droite de la canalisation. On note g le champ de pesanteur terrestre.



1) Justifier la conservation du débit volumique D_v le long de la conduite.
2) Ecrire l'équation traduisant la conservation du débit volumique D_v
3) Ecrire la relation de Bernoulli sur la ligne de courant AB
4) Montrer que ce dispositif constitue un débitmètre si l'on connaît les valeurs de S_A, S_B, h.

En classe, nous avons à disposition le système ci-dessous dans lequel circule de l'air (masse volumique ρ_{air}) :



5) Donner l'expression du débit volumique qui peut être obtenu avec ce dispositif.

Les différentes hypothèses de l'écoulement permettent d'utiliser la relation de Bernoulli entre l'amont et l'aval :

$$\frac{P_A}{\rho}+\frac{c_A^2}{2}+gz_A=\frac{P_B}{\rho}+\frac{c_B^2}{2}+gz_B$$

$$\frac{P_A}{\rho}+\frac{c_A^2}{2}=\frac{P_B}{\rho}+\frac{c_B^2}{2}$$

On a aussi, par l'incompressibilité du fluide, la conservation de du débit volumique : $c_A S_A = c_B S_B$

La loi de la statique des fluides est valable pour caractériser la loi donnant l'évolution verticale de la pression :

$$P_A - P_B = \rho g h$$

Donc :

$$gh+\frac{c_A^2}{2}=\frac{c_A^2 S^2}{2s^2}$$

D'où $D_v = sS\sqrt{\frac{2gh}{S^2-s^2}}$

A noter qu'en l'absence d'écoulement $h=0$ et on retrouve le principe des vases communicants.

Avec le second dispositif, on a : $\Delta P \approx \rho_{eau} g h$

$$\frac{\Delta P}{\rho_{air}}+\frac{c_A^2}{2}=\frac{c_B^2}{2}$$

Et : $c_A D^2 = c_B d^2$

$$\frac{\Delta P}{\rho_{air}}+\frac{c_A^2}{2}=\frac{c_A^2}{2}\left(\frac{D}{d}\right)^2$$

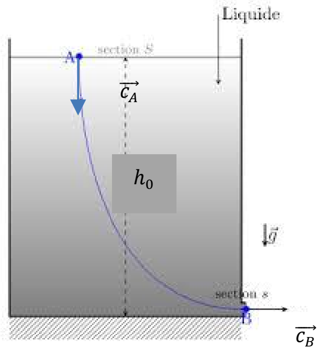
$$c_A{}^2 = -\frac{2\Delta P}{\rho_{air}\left(1-\left(\frac{D}{d}\right)^2\right)}=\frac{2\Delta P d^2}{\rho_{air}(D^2-d^2)}$$

Et donc un débit donné par :

$$D_v=\pi d^2\sqrt{\frac{2\Delta P d^2}{\rho_{air}(D^2-d^2)}}$$

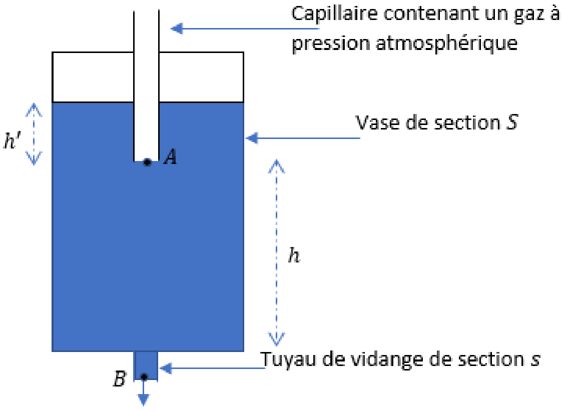
Exercice 2 : Vidange d'un réservoir

On considère un réservoir alimenté continument en eau (par un robinet non représenté ici) assurant ainsi un niveau d'eau constant. L'eau est assimilée à un fluide parfait, incompressible (de masse volumique ρ) et l'écoulement est stationnaire. On note P_0 la pression atmosphérique. On a également la section $S \gg s$. On note g le champ de pesanteur terrestre.



1) Justifier qu'il existe une relation entre S, s, c_B (vitesse de l'écoulement en B) et c_A (vitesse de l'écoulement A).
2) Appliquer Bernoulli sur la ligne de courant AB et proposer une écriture approchée de ce théorème.
3) Exprimer la vitesse c_B en fonction de h

Afin d'éviter le gaspillage d'eau, on utilise le dispositif expérimental ci-dessous appelé vase de Mariotte pour lequel $S \gg s$.



4) Justifier qu'avec ce dispositif, on a également $v_B = \sqrt{2gh}$ (relation de Torricelli)

Vous avez à disposition :

- Un chronomètre
- Un bécher
- Une balance
- Un mètre étalon
- Un vase de Mariotte

5) Proposer puis réaliser un protocole permettant d'obtenir la vitesse v_B pour différentes valeurs de h.

Vous avez à disposition sur le réseau le fichier `exo2_chap7.py` dans le dossier `thermo_td7`. Dans ce programme python vous avez une fonction `graphe(X,Y)` qui prend pour arguments 2 listes et qui renvoie un graphique avec :

- Les différents points (x_i, y_i) des listes `X,Y`
- Une régression linéaire réalisée par la fonction scipy.stats.linregress de la librairie scipy sur ce nuage de points.

6) Compléter ce programme python afin de pouvoir valider, à l'aide d'une régression linéaire, la relation de Torricelli. Critiquer le résultat obtenu.

1)Ecoulement stationnaire+fluide incompressible : $vS = Cte$.

2)Bernoulli s'écrit $\frac{c_A^2}{2} + gh \approx gh = \frac{c_B^2}{2}$

3)soit $c_B = \sqrt{2gh}$.

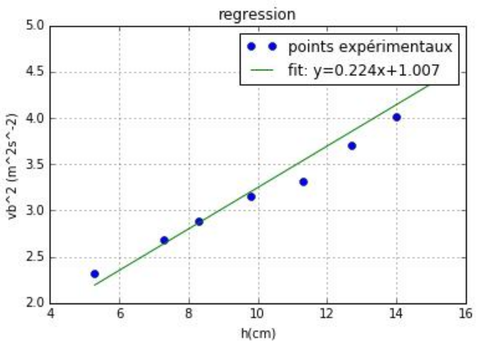
Ce résultat est le même que celui de la chute des corps !

4)Avec le capillaire, on impose en A (et sur tout l'horizontale) la pression atmosphérique. On bénéficie d'une hauteur h' d'eau permettant de garantir une hauteur h d'eau.

```
f=open("mesures.csv","r")
tab=f.readlines()

def valeurs_h():
    h=[]
    for i in range (1,len(tab)):
        A=tab[i]
        A=A.replace(",",".")
        A=A.split(";")
        A=float(A[0])
        h.append(A)
    return h
def valeurs_v2():
    v_carre=[]
    for i in range (1,len(tab)):
        A=tab[i]
        A=A.replace(",",".")
        A=A.split(";")
        A=float(A[5])
        v_carre.append(A**2)
    return v_carre
```

On obtient :



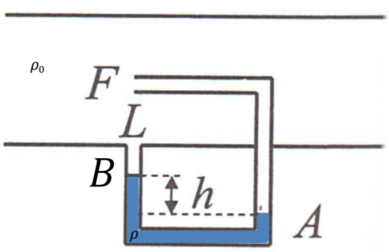
- Cette loi n'a pas exactement un coefficient directeur de $2g$
- Son ordonnée à l'origine n'est pas nulle
- Le comportement linéaire semble garanti

La relation $v_B = \sqrt{2gh}$ mérite d'être étoffer afin de prendre en compte des effets de capillarité et d'ajutage. La vitesse v_B doit être alors expérimentalement corrigée par un coefficient de débit C : $v_B = C\sqrt{2g(h-h_0)}$ avec $0 < C \lesssim 1$ et $h_0 \approx 1cm$.

Exercice 3 : Tube de Pitot à prise frontale

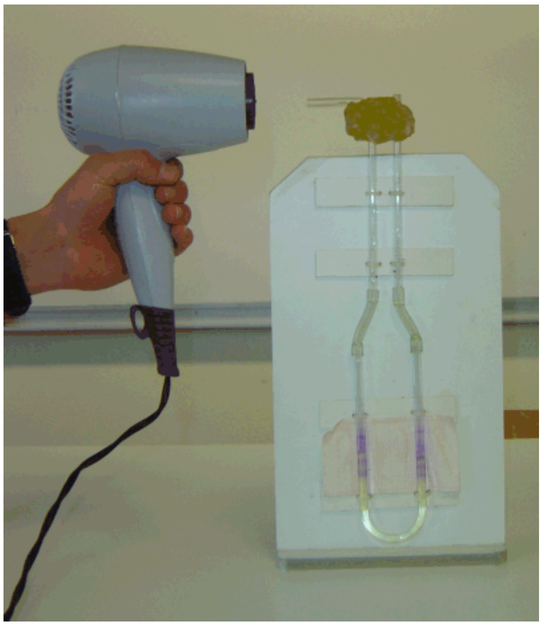
Le tube de Pitot est utilisé comme instrument de vol pour la mesure de la vitesse de l'avion. Il est placé sur le fuselage. Dans cet exercice, nous nous placerons dans le référentiel lié à l'avion.

Cette sonde cylindrique baigne dans un écoulement d'air stationnaire. L'air est considéré comme étant un fluide parfait, de masse volumique ρ_0 uniforme et de vitesse $\vec{v}$ parallèle à l'axe de la sonde.



La sonde est munie d'une prise frontale (entrée F, point d'arrêt de vitesse nul) et d'une prise latérale (entrée L) contenant du mercure de masse volumique $\rho \gg \rho_0$ (qui se stabilise avec une dénivellation h).

1) Montrer, en justifiants les éventuelles approximations, que la vitesse v de l'avion peut être déterminée en connaissant la valeur de h.
2) Utiliser le résultat précédent pour connaitre la vitesse d'écoulement de l'air soufflé par un sèche-cheveux à l'aide du dispositif ci-dessous.



En appliquant Bernoulli pour les lignes de courant arrivant en F, on a :

$$\frac{P_0}{\rho_0} + \frac{v^2}{2} = \frac{P_F}{\rho_0} + 0$$

Le rapport des masses volumique permet d'écrire :

$$P_F \approx P_A$$

$$P_L = P_0 \approx P_B$$

Et d'après la loi de la statique des fluides :

$$P_F \approx P_0 + \rho g h$$

Donc $\frac{v^2}{2} \approx \frac{\rho g h}{\rho_0}$ et alors $v \approx \sqrt{2\frac{\rho g h}{\rho_0}} \approx 300 km.h^{-1}$

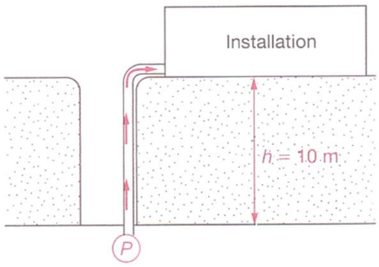
Il s'agit d'un ordre de grandeur d'un avion au décollage ou à l'atterrissage. L'hypothèse d'un gaz incompressible est à remettre en cause pour des vitesses supersoniques.

Avec un sèche-cheveux, on observe typiquement $h \approx 1cm$ et donc $v \approx \sqrt{2\frac{\rho g h}{\rho_0}} \approx 10 m.s^{-1}$

Ecoulement non conservatif de fluides parfaits et incompressibles

Exercice 4 : problème de physique

Une pompe immergée à 10m sous terre doit permettre de remonter de l'eau stagnante dans une installation située à la surface. La pression du liquide au niveau du captage est voisine de la pression atmosphérique et on désire un débit volumique égale à $D_v = 7m^3.h^{-1}$ avec, dans l'installation, une pression supérieure à la pression atmosphérique de 2,5 bar. Les sections des conduites sont identiques et on se place en régime stationnaire.



Donner une estimation grossière, visant à dégager un ordre de grandeur de la puissance indiquée P_i de la pompe.

Il s'agit ensuite d'un écoulement non conservatif pour lequel la relation de Bernoulli donne :

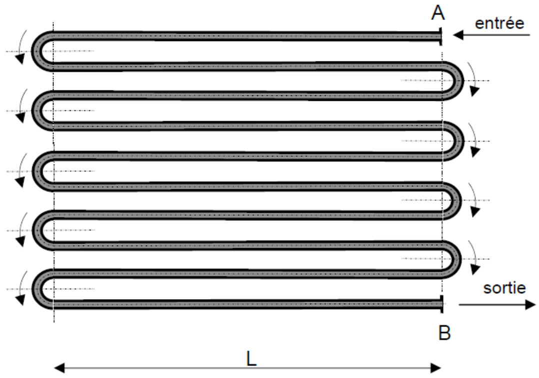
$$P = \rho D_v \left(\left(\frac{P_s}{\rho} + gh \right) - \left(\frac{P_0}{\rho} \right) \right) \approx 700W$$

Avec $P_s \approx 3{,}5bar$

Ecoulement non conservatif de fluides réels et incompressibles

Exercice 6 : Pertes de charges singulières et régulières

Un considère un circuit hydraulique d'un planché chauffant. L'eau chaude transite horizontalement dans cette canalisation de section constante, de diamètre intérieur $d = 20mm$ et constituée de tube de longueur $L = 6m$



On cherche à conditionner la pompe permettant d'assurer un débit volumique $D_v = 0{,}3L/s$ stationnaire. On note c la vitesse débitante permettant d'écrire ce débit avec $D_v = cS$. L'eau est supposée incompressible de masse volumique ρ. On prend en compte le caractère visqueux de l'eau : sa viscosité est $\eta = 10^{-3}N.s.m^{-2}$.

La canalisation est réalisée dans un matériau inoxydable dont la taille caractéristique des imperfections est $\varepsilon = 1mm$. On détermine le coefficient de perte de charge de charge régulière f à l'aide du diagramme de Moody. Ce coefficient est aussi donné par $f = \frac{2|\Delta P|d}{\rho L c^2}$ où $|\Delta P|$ mesure la diminution de pression. $|\Delta P|$ est aussi fonction du régime d'écoulement (laminaire (lent) ou turbulent (rapide)) que l'on distingue avec le nombre de Reynolds $Re = \frac{\rho c}{\eta} d$.

1) Estimer la perte de pression $|\Delta P|$ (il s'agit ici de pertes de charges régulières).

Chaque coude est responsable de pertes de charge singulière et la chute de pression suit la loi $\rho K \frac{c^2}{2}$ avec $K = 0{,}48$.

2) Calculer la chute de pression totale $|\Delta P|'$ liée à ces pertes de charges singulières.
3) Calculer le travail massique des forces de frottement sur toute la canalisation.
4) Quelle est puissance doit fournir un compresseur pour compenser ces pertes ? Commenter.

1) Le nombre de Reynolds est $Re = \frac{\rho c}{\eta} d = 4\frac{\rho D_v}{\eta \pi d} \approx 20000$ et $\frac{\varepsilon}{d} = 0{,}05$

   D'où $f \approx 0{,}072$ et $|\Delta P| = \frac{\rho L c^2 f}{2d} \approx 0{,}1 bar$
2) Les 9 coudes sont responsables d'une chute de pression donnée par : $|\Delta P|' = 9\rho K\frac{c^2}{2} \approx 0{,}02 bar$ ce qui est presque négligeable
3) En adaptant la relation de Bernoulli, $\frac{|\Delta P|}{\rho} = -\omega_f$

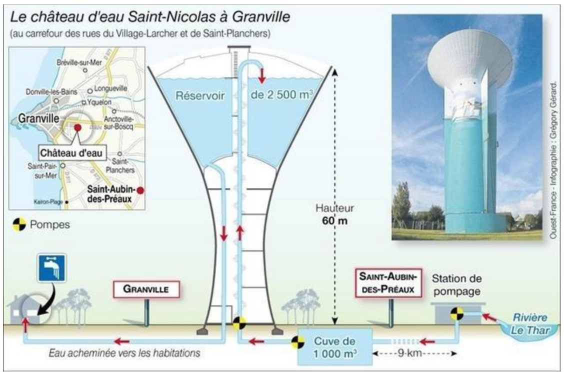
   $\omega_f \approx -12 J/kg$
4) Et donc une puissance de $P = \rho D_v |\omega_f| = 3{,}6W$

   Heureusement ce sont des faibles pertes !

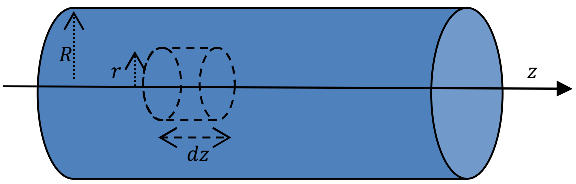
Exercice 7 : Pertes de charge

Un château d'eau permet :

- De stocker de l'eau en cas de besoins immédiats (pour les pompiers par exemple)
- D'assurer un débit suffisant jusqu'aux habitations malgré la viscosité de l'eau.



Nous allons étudier le phénomène de perte de charge régulière qui se produit dans la conduite horizontale reliant un château d'eau aux habitations.



L'écoulement considéré est stationnaire (nécessairement laminaire) et l'eau est assimilée à un fluide incompressible de viscosité η. La conduite est cylindre horizontal de rayon R.

On décrit l'écoulement en réparage cylindrique. On suppose que le champ des vitesses présente une invariance par rotation autour de l'axe z, ainsi :

$$\vec{v} = v_z(r,z)\overrightarrow{u_z}$$

1) Justifier que le champ des vitesses est indépendant de z.
2) Dessiner quelques lignes de champ, puis justifier qu'une particule de fluide est animée d'un mouvement rectiligne uniforme.

Dans la suite, nous allons étudier une particule de fluide de géométrie cylindrique et centrée sur l'axe z (rayon r, longueur dz). Le mouvement rectiligne et uniforme de cette particule de fluide est assuré par la compensation de deux types de forces :

- Les forces pressantes (motrices)
- Les forces de viscosité (résistantes)

On néglige l'effet du poids, ce qui permet de considérer que le champ des pressions P ne dépend que de z.

3) Donner l'expression du bilan des force pressante $d\overrightarrow{F_p}$ s'exerçant sur la particule de fluide.

On donne l'expression de la force de viscosité élémentaire s'exerçant sur un élément de surface $\eta \frac{dv_z}{dr} dS\vec{u}_z$

4) Donner l'expression du bilan des force de viscosité $d\overrightarrow{F_\eta}$ s'exerçant sur la particule de fluide.
5) En déduire alors que $\frac{dP(z)}{dz} = \frac{2\eta}{r}\frac{dv(r)}{dr}$
6) Justifier que $P(z)$ est une fonction affine et décoissante.

On note $\Delta P < 0$ la chute de pression sur une longueur L de canalisation.

7) Montrer alors que $v(r) = \frac{|\Delta P|}{4\eta L}(R^2 - r^2)$
8) Exprimer le débit volumique D_v à travers la canalisation et montrer alors que $|\Delta P| = R_h D_v$. On exprimera R_h en fonction des données du problème.

On considère un château d'eau permettant d'assurer un débit $D_v = 100 L.s^{-1}$ pour alimenter des habitations. La pression au niveau de ces habitations est de l'ordre de 1,5bar.

9) Estimer la résistance hydraulique de la canalisation principale.

Ecoulement stationnaire et fluide incompressible→ $div\vec{v} = 0 = \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$

$$d\vec{F_p} = \left(P(z) - P(z+dz)\right)\pi r^2 \vec{u}_z = -\frac{dP}{dz}\pi r^2 dz\vec{u}_z$$

$$d\vec{F_\eta} = 2\pi\eta r\frac{dv_z}{dr}dz\vec{u}_z$$

On a alors :

$$\frac{dP(z)}{dz} = \frac{2\eta}{r}\frac{dv(r)}{dr}$$

Il s'agit de l'égalité entre deux fonctions dépendant de variables différentes : l'égalité implique que ces quantités sont constantes.

L'application de Bernoulli impose à la pression de diminuer, donc $\frac{dP(z)}{dz} < 0$.

L'intégration donne alors :

$$\frac{2\eta}{r}\frac{dv(r)}{dr} = -\frac{|\Delta P|}{L}$$

$$v(r) = -\frac{|\Delta P|}{4\eta L}r^2 + Cte$$

La nullité de la vitesse sur la conduite donne alors

$$v(r) = \frac{|\Delta P|}{4\eta L}(R^2 - r^2)$$

Le calcul du débit (vu au TD précédente) donne :

$$D_v = \frac{|\Delta P|}{4\eta L}\left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right)2\pi = \frac{\Delta P}{8\eta L}\pi R^4$$

$$|\Delta P| = R_h D_v$$

$$R_h = \frac{8\eta L}{\pi R^4}$$

Dans notre cas : $R_h = \frac{|\Delta P|}{D_v} = 4{,}5 \times 10^6 Pa.s.m^{-3}$

Exercice 8 : Problème de physique

Pour un même gradient de pression donné, par quel tuyau horizontal doit-on remplacer un tuyau de rayon R pour obtenir un débit volumique 10 fois plus important d'un fluide incompressible ?

D'après la formule de perte de charge précédente : $\Delta P = \frac{KD_v}{R^4}$

Donc pour un rapport 10 des débits :$10 = \frac{R_2^4}{R_1^4}$ ce qui conduit à un rapport de 1,8 entre les rayons

On note ici l'influence notable d'une faible variation du rayon de la canalisation.

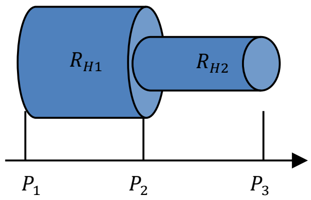
Exercice 9: Association de résistances hydrauliques

On considère un écoulement stationnaire d'un fluide réel incompressible vérifiant la loi de Poiseuille de perte de pression $\Delta P = R_h D_v$ où D_v est le débit volumique et R_h la résistance hydraulique.

1) Démontrer la loi d'association série de deux résistances hydrauliques. Représenter une portion de circuit hydraulique qui rend compte de deux résistances hydrauliques différentes en séries
2) Démontrer la loi d'association parallèle de deux résistances hydrauliques. Représenter une portion de circuit hydraulique qui rend compte de deux résistances hydrauliques différentes en parallèles.

Loi d'association de deux résistances :

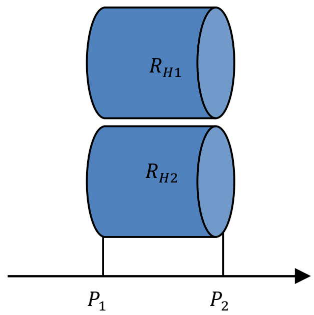
- En séries :



Avec : $P_1 - P_2 = R_{H1}D_v$ et $P_2 - P_3 = R_{H2}D_v$

Donc $P_1 - P_3 = (R_{H1} + R_{H2})D_v$

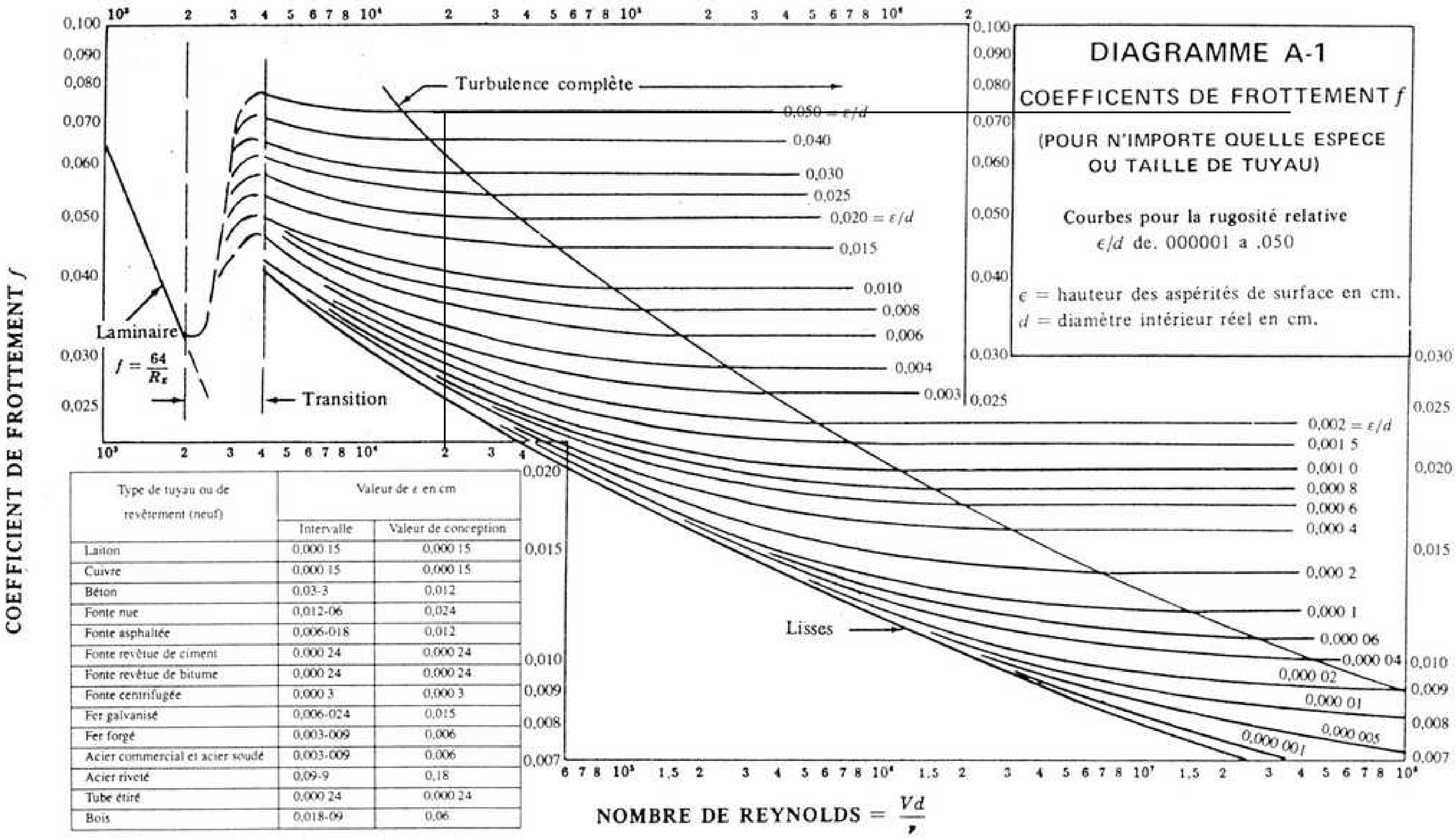
- En parallèles



Avec : $P_1 - P_2 = R_{H1}D_{v1} = R_{H2}D_{v2}$

Et $D_v = D_{v1} + D_{v2} = \Delta P\left(\frac{1}{R_{H1}} + \frac{1}{R_{H2}}\right)$

D'où $R_{eq} = \frac{R_{H1}R_{H2}}{R_{H1}+R_{H2}}$Les résultats précédents montrent que la résistance hydraulique augmente avec la longueur mais surtout avec les rayons faibles.



Type de tuyau ou de revêtement (neuf)	Valeur de ε en cm	
	Intervalle	Valeur de conception
Laiton	0,000 15	0,000 15
Cuivre	0,000 15	0,000 15
Béton	0,03-3	0,012
Fonte nue	0,012-06	0,024
Fonte asphaltée	0,006-018	0,012
Fonte revêtue de ciment	0,000 24	0,000 24
Fonte revêtue de bitume	0,000 24	0,000 24
Fonte centrifugée	0,000 3	0,000 3
Fer galvanisé	0,006-024	0,015
Fer forgé	0,003-009	0,006
Acier commercial et acier soudé	0,003-009	0,006
Acier riveté	0,09-9	0,18
Tube étiré	0,000 24	0,000 24
Bois	0,018-09	0,06