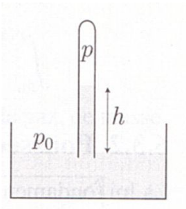
Statique des fluides incompressibles

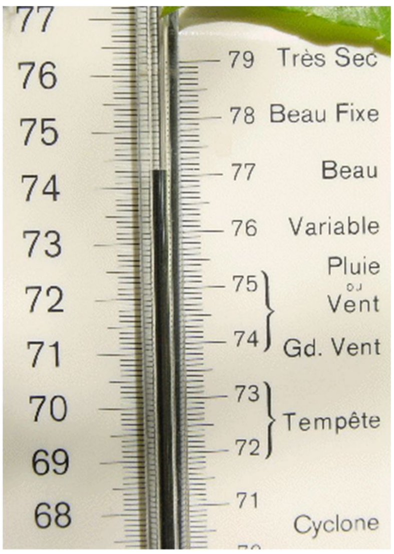
Activité 1 : Baromètre de Torricelli

On réalise un baromètre en remplissant un tube de 1 mètre de long avec du mercure (on note ρ_{Hg} la masse volumique du mercure, fluide supposé incompressible et indilatable).



Ce tube est retourné dans une cuve contenant également du mercure, en contact avec l'air atmosphérique, à la pression ordinaire $P_0 = 1{,}013.10^5 Pa$. La colonne de mercure dans le tube s'abaisse, jusqu'à atteindre une hauteur h.

1) Préciser le principe de ce baromètre.
2) En déduire l'expression de la hauteur h.
3) Pourquoi n'utilise-t-on pas de l'eau pour ce baromètre ?
4) A l'aide de la photo du baromètre ci-dessous (en cm de mercure), déterminer la masse volumique du mercure.



La création du vide d'air dans l'éprouvette va permettre de mettre en évidence la pression atmosphérique par création d'une différence de pression. La colonne de mercure est alors soumise à son poids et à la force de pression atmosphérique (non compensée).

Pour traduire l'équilibre, on a : $\rho g h = P_0$

Donc, pour le mercure $h = \frac{P_0}{\rho g}$: pour l'eau il faudrait 10m !

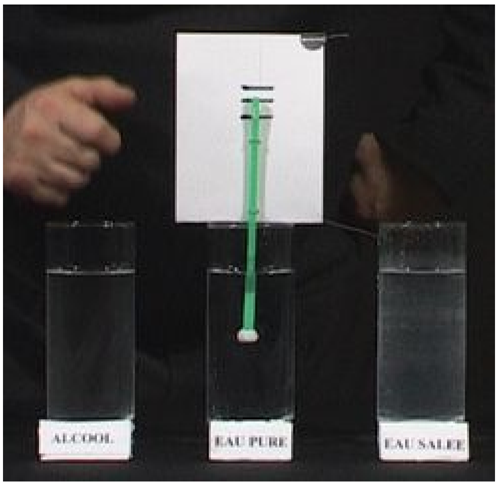
Le plus souvent, le temps est à la pluie lorsque la pression est basse. Lorsqu'elle diminue rapidement, le vent et le mauvais temps menacent. À l'inverse, une pression atmosphérique élevée est synonyme de temps calme mais pas forcément beau. Ainsi, en été, hautes pressions et beau temps vont de pair, mais en hiver, elles sont souvent accompagnées de brouillards et de nuages bas qui peuvent durer toute la journée.

Activité 2 : Petits problèmes de physiques

1) A quelle pression respire un plongeur lorsqu'il se trouve à une profondeur de 50m ?

Avec l'eau, il est bon d'avoir à l'esprit qu'il faut une hauteur de 10m pour ajouter une atmosphère. Le plongeur à 50m est donc à 6 atmosphères !

2) Un densimètre permet de mesurer la densité des liquides. Expliquer comment une paille lestée par de la pâte à fixe permet d'accéder à la densité d'un liquide. Réaliser alors une mesure de la densité d'une eau saturée en sel.



A l'équilibre :

$$mg = \rho_{fluide} ghS$$

En faisant le teste avec de l'eau et de l'eau salée :

$$d_{eau,salée} = \frac{h_{eau}}{h_{eau,salée}} \approx 1{,}3$$

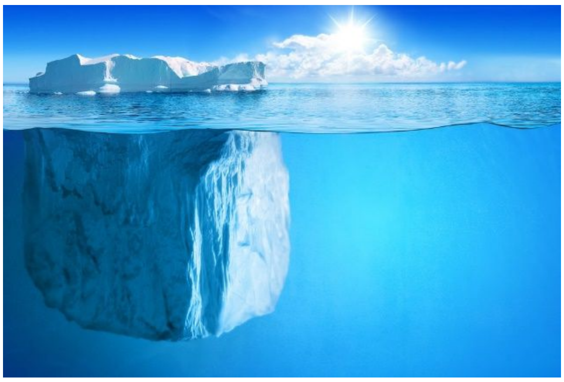
3) Quel est, en pourcentage, le volume immergé d'un iceberg sachant que $\rho_{glace} = 0{,}92 g.cm^{-3}$?

Toujours à l'équilibre :

$$\rho_{eau} xVg = \rho_{glace} Vg$$

Donc $x = \frac{\rho_{glace}}{\rho_{eau}} = 92\%$

D'où le drame du Titanic !



4) Un glaçon cubique de côté a flotte sur l'eau ; on le tire légèrement vers le haut et on le relâche. En supposant qu'il reste à la verticale, estimer la période de ses oscillations non amorties et proposer une application numérique. On note les masses volumiques de l'eau solide et liquide respectivement ρ_s et ρ_l.

Prenons l'origine sur le bord supérieur à la situation d'équilibre, et appliquons le théorème du centre de masse, on a alors à un instant t :

$$m\ddot{z} = -mg + \rho_e gS(h_{eq} - z) = -\rho_e gSz$$

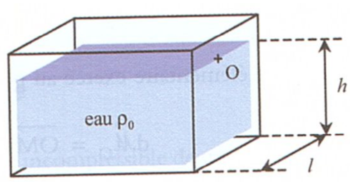
Soit : $\ddot{z} + \frac{\rho_e g}{\rho_g a} z = 0$

Il s'agit d'un oscillateur harmonique dont la pulsation propre est : $\omega_0^2 = \frac{\rho_e g}{\rho_g a}$, et $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\rho_g a}{\rho_e g}} \approx \frac{6}{30} \approx 0{,}2s$

Calculs de force pressante

Activité 3 : Résultante des forces de pression sur un barrage plan

Un barrage est constitué d'une paroi verticale de largeur l. De l'eau, assimilée à un fluide incompressible et indilatable, de masse volumique ρ_0, s'appuie sur une hauteur h sur une des faces du barrage. La pression atmosphérique P_0 s'exerce sur l'autre face du barrage et sur la surface libre de l'eau.



On prendra un axe Oz descendant.

1) Exprimer la force pressante élémentaire s'exerçant sur une surface élémentaire de longueur l et d'épaisseur dz.

2) Exprimer la résultante des forces de pression s'exerçant sur le barrage.
3) Exprimer le moment en O de la résultante de ces forces de pression.
4) En déduire la position du centre de poussée A : point où l'action globale de l'eau sur le barrage ne crée pas de moment.

La différence de pression de part et d'autre de la paroi est donnée par $\rho g z$.

La force élémentaire s'exerçant sur la tranche ldz est donnée par : $df = \rho g z l dz$

Et donc le bilan de force est :

$$F = \rho g l \int_0^h z dz = \rho g l \frac{h^2}{2}$$

Pour le calcul du moment, il faut d'abord étudier le moment d'une force élémentaire puis sommer (car toutes les forces ne sont pas de même intensité aux différents points d'application) :

$$d\overrightarrow{M_0} = \overrightarrow{OM} \wedge d\vec{f} = z \times \rho g z l dz \overrightarrow{u_x}$$

Donc le moment total est :

$$\overrightarrow{M_0} = \rho g l \int_0^h z^2 dz \overrightarrow{u_y} = \rho g l \frac{h^3}{3} \overrightarrow{u_x}$$

On peut donc écrire le torseur des actions mécaniques des fluides sur le barrage :

$$\{T\} = \begin{Bmatrix} \vec{F} \\ \overrightarrow{M_0} \end{Bmatrix}_0 = \begin{Bmatrix} \rho g l \frac{h^2}{2} \overrightarrow{u_y} \\ \rho g l \frac{h^3}{3} \overrightarrow{u_x} \end{Bmatrix}_0$$

Un torseur glisseur est un torseur dont le champ des moments s'annule en au moins un point. Notons A ce point :

$$\overrightarrow{M_0} = \overrightarrow{M_A} + \int_0^h \overrightarrow{OA} \wedge d\vec{f} = \overrightarrow{OA} \wedge \int_0^h d\vec{f}$$

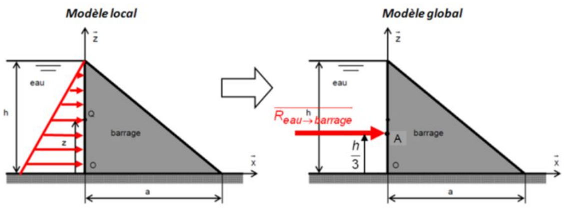
$$\overrightarrow{M_0} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}$$

Ce point A a pour côte z_A :

$$z_A \rho g l \frac{h^2}{2} = \rho g l \frac{h^3}{3}$$

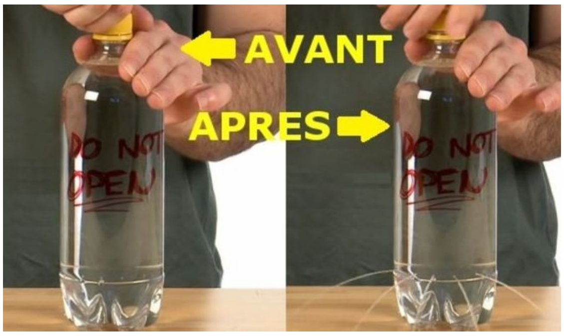
$$z_A = \frac{2}{3} h$$

La résultante des forces de pression s'applique au 2/3 de la zone immergée : rien d'étonnant dans la mesure où la pression est plus importante au pied du barrage.



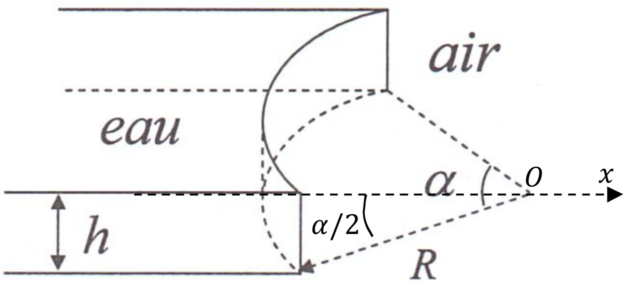
<u>Activité 4 : pression sur un barrage cylindrique</u>

1) Expliquer cette expérience introductive :



En fermant la bouteille, l'eau arrête de s'écouler car il y a création d'une dépression.

Un barrage à la forme d'un secteur cylindrique de hauteur h, caractérisé par son rayon R et l'angle α. Il est rempli d'eau, de masse volumique ρ et l'air ambiant est à la pression P_0.



2) Justifier, par une analyse des symétries du problème, que la résultante des forces de pression est suivant Ox.
3) Exprimer la résultante des forces de pression suivant Ox et la résultante des forces de pression suivant Oy s'exerçant sur la paroi cylindrique.

Chacune des forces élémentaires est portée par le vecteur unitaire $\overrightarrow{u_r}$ (dont la direction est propre à chaque point M du barrage et qu'il ne convient pas d'additionner entre eux sans précaution)

On peut invoquer le principe de Curie qui signifie que les effets ont au moins les symétries et invariances de leurs causes. Ainsi le plan vertical contenant l'axe Ox est un plan de symétrie et la projection « utile » est $d\vec{f}.\overrightarrow{u_x}$ mesure la résultante « utile ». Nous avons donc une force totale donnée par :

$$F = \iint \rho g R(h - z) \times cos\theta dz d\theta$$

$$F = \rho g R \int_0^h (h - z)dz \times \int_{-\alpha/2}^{+\alpha/2} cos\theta d\theta$$

$$F = \rho g R h^2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

On peut vérifier notre hypothèse de travailler en calculant :

$$F_y = -\iint R\rho g(h - z) \times sin\theta dz d\theta$$

$$F_y = -\rho g R \int_0^h (h - z)dz \times \int_{-\alpha/2}^{+\alpha/2} sin\theta d\theta$$

$$F_y = \rho g R \left[hz - \frac{z^2}{2}\right]_0^h [cos\theta]_{-\alpha/2}^{+\alpha/2} = 0$$

Activité 5 : Résultante des forces de pression sur une paroi sphérique

Le vide est fait à l'intérieur d'une coquille sphérique (hémisphères de Magdebourg de rayon R=0,5m).

Quelle force doivent développer les chevaux pour désolidariser les deux hémisphères ?

Il est intéressant de remarquer que la force totale qui s'exerce sur la sphère est nulle. En revanche, le bilan est non nul pour chaque hémisphère et c'est cette force que l'on va calculer. La symétrie du système permet de penser la que la résultante des forces et suivant l'axe Oz horizontal, ainsi :

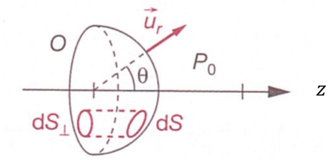
$$F = -\iint P_0 dS\overrightarrow{u_r}.\overrightarrow{u_z}$$

$$F = \iint P_0 R^2 sin\theta cos\theta d\theta d\varphi$$

$$F = \iint P_0 R^2 sin\theta d sin\theta d\varphi$$

$$F = \pi P_0 R^2$$

Ce résultat est évident car $dS\overrightarrow{u_r}.\overrightarrow{u_z}$ représente la surface projetée sur le plan vertical :



AN : si on suppose un vide total : $F \approx 75000N$ soit l'équivalent de 7500kg !

Statique des fluides gazeux

Activité 6 : Equilibre isotherme de l'atmosphère

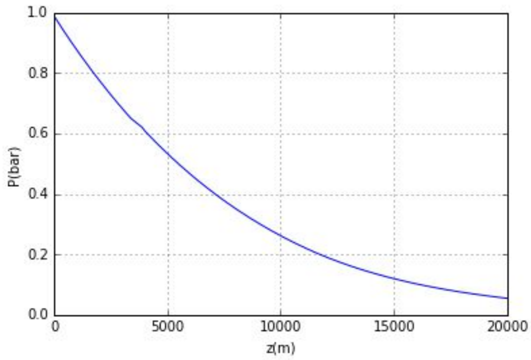
L'atmosphère est assimilée à un gaz parfait statique. On considère que le champ de pesanteur terrestre g est uniforme et on suppose également l'atmosphère isotherme.

1) Exprimer la pression $P(z)$ en fonction de la hauteur z par rapport au sol en posant $P(z=0)=P_0$ où P_0 est la pression atmosphérique au niveau du sol.
2) Définir puis calculer la hauteur caractéristique δ de variation de la pression pour 20°C.
3) En déduire la pression au sommet du mont Blanc d'après ce modèle (on donne $e^{-1/2} \approx 0{,}6$).
4) Justifier que dans un volume à taille humaine, on puisse parler de « la pression ».

Un ballon sonde est lancé et permet d'obtenir la pression pour différentes altitudes*. Un traitement informatique permet ensuite d'obtenir deux tableaux numpy accessibles sur un programme python.

- `tab_h` qui recense l'altitude des différents points de mesures
- `tab_P` qui contient les valeurs des pressions mesurées.

On obtient alors le graphe suivant :



L'atmosphère n'est rigoureusement pas isotherme sur une épaisseur de 20 km et la loi précédente est donc à modifier pour décrire correctement la pression en fonction de l'altitude. On cherche alors à vérifier si une loi en $P(z) = P_0 e^{-az}$ peut correspondre aux points expérimentaux à l'aide de Python (a étant un nouveau paramètre à déterminer). On utilisera la librairie numpy :

```
import numpy as np
```

1) Ecrire une fonction `p` renvoyant un tableau des valeurs de pression vérifiant $P(z) = P_0 e^{-az}$ et ayant pour arguments `(tab_h,a)`

On rappelle que :

`np.sum(tableau)` : renvoie la somme de tous les éléments d'un tableau numpy

2) Ecrire une fonction `erreur(a)` qui renvoie la somme du carré des écarts entre les points expérimentaux et la loi souhaitée.

Cette fonction erreur doit être minimisée, c'est-à-dire qu'il faut trouver une valeur du paramètre a qui minimise l'erreur.

Le tracé $P(z)$ ci-dessus permet d'estimer une plage possible des valeurs pertinentes de a comprise entre $10^{-5}m^{-1}$ et $10^{-3}m^{-1}$.

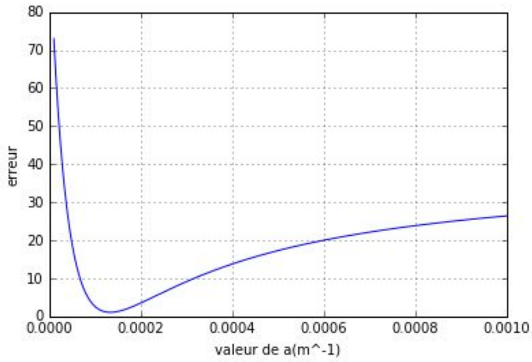
On rappelle que :

`np.linspace(a,b,N)` : renvoie une liste de N valeurs comprises entre a et b.

*valeurs extraites d'une publication de www.planete-sciences.org

3) Ecrire une fonction `liste_e()` qui retourne une liste de valeur d'erreurs associée à une liste de valeurs de a comprenant 1000 points dans l'intervalle $10^{-5}m^{-1}$ et $10^{-3}m^{-1}$

On obtient alors le graphe ci-dessous :



4) On propose ci-dessous un algorithme permettant de trouver la valeur de a. Expliquer le principe de cette méthode ainsi que la précision obtenue sur a.

```
def dico():

    a_inf=10**-4
    a_sup=10**-4+1/100*10**-4
    while e(a_sup)-e(a_inf)<0 :
        a_inf= a_sup
        a_sup= a_sup+1/100*10**-4
    return (a_inf+a_sup)/2
print(dico())
```

Avec la loi de la statique des fluides et un axe ascendant : $\frac{dP(z)}{dz} = -\rho g$

Et la loi des gaz parfait donne alors : $\rho = \frac{MP}{RT_0}$

Ainsi : $\frac{dP(z)}{dz} + \frac{Mg}{RT_0} z = 0$

Soit $P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{Mg}{RT_0} z\right)$.

On obtient donc une distance caractéristique de décroissance donnée par :

$$\delta = \frac{RT_0}{Mg} \approx \frac{10 \times 300}{30 \times 10^{-3} \times 10} = 10km$$

C'est donc au bout de quelques dizaines de kilomètres que la pression, avec ce modèle, devient « faible » (par rapport à P_0)

On peut donc trouver la pression au niveau du Mont Blanc :$P(5km) = P_0 e^{-5/10} \approx 0{,}6P_0$.

On a donc une diminution significative de la pression avec l'altitude :

- A l'Everest (8km), la pression ne vaut plus que le tiers de la pression normale
- En altitude, les forces de pression plus faible favorise l'ébullition à basses températures (et donc une cuisson moins rapide : ébullition à 90°C à 3000m)
- Les météorologistes, pour leurs prédictions, apprécient de faibles variations de pression (entre 990hPa à 1030 hPa) qu'ils doivent corriger avec l'altitude de leur sonde.

A l'échelle h humaine, on a $h \ll \delta$ et donc $P \approx P_0$, on peut donc parler de pression uniforme (ce qui revient à négliger la poussée d'Archimède ! Il faut donc reprendre cette hypothèse dans le cas d'étude d'un aérostat dont le volume et la massique volumique permettent une poussée d'Archimède plus importante que le poids.

```
#modélisation
def p(valeur_h,a):
    return np.exp(-a*valeur_h)#avec les
tableaux: c'est rapide, pas de boucle for
def e(a):
    ptheo=p(tab_h,a)
    erreur=np.sum((ptheo[:]-tab_P [:])**2)
    return erreur

#erreur
def liste_e():
    liste_e=[]
    for i in np.linspace(10**-5,10**-
3,1000):
        liste_e.append(e(i))
    return liste_e

def dico():
    a_inf=10**-4#l'idée est de se placer
sur la partie décroissante de la courbe
e(a)
    a_sup=10**-4+1/100*10**-4#1/100 plus
loin la fonction est plus faible
```

```
    while e(a_sup)-e(a_inf)<0 :#jusqu'au
minimum où cette inégalité n'est plus vraie
        a_inf= a_sup
        a_sup= a_sup+1/100*10**-4
    return (a_inf+a_sup)/2
print(dico())#retourne la valeur de a
précédente précis à 10^-6 m^-1!
```