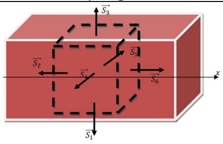
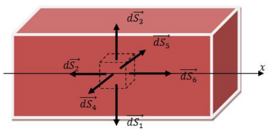
Chapitre 5 : Les équations de l'électromagnétisme

I- L'équation de conservation de la charge

a) Démonstration

Soit un échantillon de matière traversé par un courant d'intensité $i(M,t)$ (associé à un vecteur densité de courant $\vec{j}(M,t)$). On note $\rho(M,t)$ la densité volumique de charges et on postule la conservation de la charge.

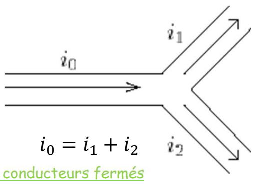
Analyse globale	Analyse locale
 Soit V le volume de notre système, alors pendant dt (en notant i_e et i_s les intensités des courants rentrant et sortant de V) : $q(t+dt)-q(t)=(i_e-\|i_s\|)dt$ $dq=-\oint\!\!\oint \vec{j}.\overrightarrow{dS_{ext}}\,dt$ $\frac{dq}{dt}=\frac{d}{dt}\iiint_V \rho dV=\iiint_V \frac{\partial\rho}{\partial t}dV=-\oint\!\!\oint \vec{j}.\overrightarrow{dS_{ext}}$	 Soit $dq(M,t)=\rho(M,t)dV$ la charge de notre système (volume $dV=dxdydz$), pendant dt, nous avons : $dq(M,t+dt)-dq(M,t)=(\delta i_e-\|\delta i_e\|)dt$ $d^2q=\frac{\partial dq}{\partial t}dt=-div\vec{j}dVdt$ $\frac{\partial\rho}{\partial t}=-div\vec{j}$

L'équation locale de conservation de la charge s'écrit : $\frac{\partial\rho}{\partial t}=-div\vec{j}$

b) Cas particulier du régime stationnaire

En régime stationnaire la charge d'un échantillon n'évolue pas et l'équation bilan conduit à $div\vec{j}=0$

En régime stationnaire, le vecteur densité de courant est à flux conservatif : on retrouve la loi des nœuds et des branches de l'électrocinétique



II- Equations Maxwell dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires et dans les circuits conducteurs fermés

a) Rappels : Equations de Maxwell en régime stationnaire

Les lois de l'électrostatique et de la magnétostatique se retrouvent dans 4 équations :

$$\begin{cases} div\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}(MG), \overrightarrow{rot}\vec{E}=\vec{0}(MF) \\ div\vec{B}=0(M\phi), \overrightarrow{rot}\vec{B}=\mu_0\vec{j}(MA) \end{cases}$$

Ces lois sont bien découplées de sorte que les sources de chaque champ sont bien distinctes.

A noter que $\vec{E}=-\vec{\nabla}V$ et MG $\vec{\nabla}.\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ conduisent à l'équation de Poisson : $\Delta V=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$.

Cette équation, dans un milieu ne présentant pas d'accumulation de charge en volume (comme dans un conducteur à l'équilibre), devient $\Delta V=0$. Cette équation est appelée alors équation de Laplace. Cette équation admet une solution unique vérifiant naturellement l'équation et les conditions aux limites de problème.

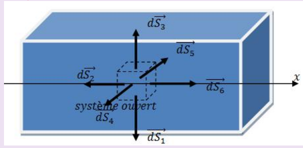
b) L'approximation des régimes quasi-stationnaires

Lorsque l'on applique un potentiel à l'extrémité d'un conducteur de longueur d alors ce potentiel met un temps $\Delta t=\frac{d}{c'}$ pour être ressenti à l'extrémité du conducteur (c' représente alors la vitesse de propagation du potentiel dans le conducteur. Cette vitesse est de l'ordre de $10^8 m/s$).

Commenté [A1]: **Problématique principale : Pourquoi parle-t-on de champs électromagnétiques alors que nous avons distingué les champs magnétostatique et électrostatique ?**

1) Démontrer l'équation de conservation de la masse pour un écoulement fluide dans une canalisation (sans réaction nucléaire)

Le formalisme est le même :
Soit $dm=\rho(M,t)dV$ la masse contenue dans le volume $dV=dxdydz$. Pendant dt, nous avons :



$dm(M,t+dt)-dm(M,t)=(\delta D_{me}-|\delta D_{ms}|)dt$
$\frac{\partial dm}{\partial t}dt=-\sum_i \vec{j}.\overrightarrow{dS_{i,ext}}dt=-div\vec{j}dVdt$
$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-div\vec{j}$

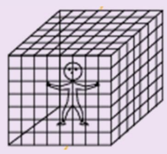
2) Retrouver explicitement la loi des nœuds de l'électrocinétique en régime stationnaire à l'aide de la conservation du flux de $\vec{j}$?

En régime stationnaire : $div\vec{j}=0$ et donc $\oint\!\!\oint \vec{j}.\overrightarrow{dS_{ext}}=0$ *ce qui assure* $\sum i=0$ *sur un noeud.*

3) En utilisant MG et l'équation de conservation de la charge, montrer que $\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\rho}{\tau}=0$ et que toute accumulation de charge « s'évanouie » très rapidement au sein d'un conducteur de conductivité $\gamma=10^8 S.m^{-1}$ (la permittivité diélectrique du vide est $\varepsilon_0\approx 10^{-11}F.m^{-1}$).

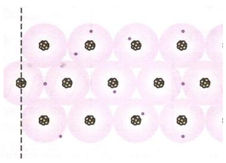
$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-div\vec{j}=-div\gamma\vec{E}=-\gamma div\vec{E}=-\gamma\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ *et donc*:
$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\rho}{\tau}=0$
Donc toute densité volumique ρ_0 disparaît suivant la loi :
$\rho(t)=\rho_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ *avec* $\tau=\frac{\varepsilon_0}{\gamma}=10^{-19}s$

4) Une cage conductrice est reliée à la masse dont le potentiel est considéré nul. Donner l'expression du potentiel dans la cage sachant que le problème de Laplace n'admet qu'une unique solution une fois les conditions aux limites fixées.

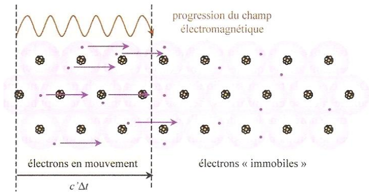


Avec $\Delta V=0$ *et les conditions aux limites imposées*, une solution apparît comme évidente $V=0$ *soit une zone sans champ électrique!*

Modification du potentiel à t = 0



Propagation du signal électrique



Considérons un générateur de tension variable imposant alors un courant périodique. On comprend que l'application d'un potentiel ne soit ressentie de manière quasi-instantanée dans tout le circuit que si la période T de variation du potentiel est grande par rapport à son temps Δt nécessaire pour être « arriver » à l'autre extrémité du circuit.

Ainsi, il faut : $T \gg \Delta t \leftrightarrow T \gg \frac{d}{c'} \leftrightarrow f \ll \frac{c'}{d}$.

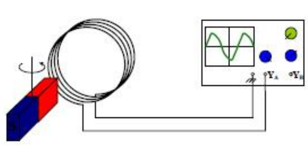
En prenant un circuit de taille courante de l'ordre du mètre, on s'aperçoit alors qu'il faut travailler à une fréquence inférieure à 100MHz pour que le courant puisse être approximé comme uniforme dans tout le circuit : c'est l'approximation des régimes quasi-stationnaire.

Avec l'approximation des régimes quasi stationnaires et dans les circuits conducteurs fermés, on utilisera les équations suivantes :

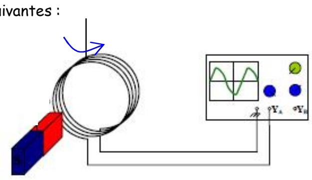
- $div\vec{j} = 0$ (Les lois des nœuds et des branches sont donc vérifiées)
- L'équation de Maxwell-flux reste $div\vec{B}(M,t) = 0$
- L'équation de Mawxell-Ampère : $\overrightarrow{rot}\vec{B}(M,t) = \mu_0\vec{j}(M,t)$
- L'équation de Maxwell-Gauss : $div\vec{E}(M,t) = 0$

c) Rappels sur l'induction dans les milieux conducteurs fermés

On observe une tension, appelée tension induite, dans les deux situations suivantes :



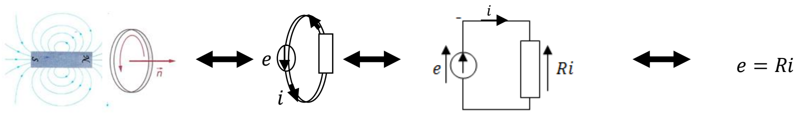
Circuit fixe dans un champ magnétique variable



Circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire

Dans les deux situations, la tension induite est donnée par la loi de Lenz-Faraday : $e = -\frac{d\phi}{dt}$

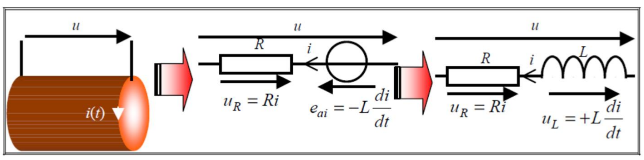
Le circuit résistif est alors, dans une première approche, modélisable par :



Tension induite e et courant induit i sont fléchés en convention générateur. Le sens de fléchage commun à e et i fixe également l'orientation de $\vec{n}$ avec la règle du tire bouchon.

En toute rigueur, il faut tenir compte du champ magnétique rayonné par le circuit lui-même (traversé par un courant d'intensité i) et responsable d'un flux propre $\phi_p = Li(t)$ où $L > 0$ est l'inductance propre du circuit $[L] = [H]$ et donc d'une tension auto-induite e_{ai}

La modélisation électrique d'une bobine d'inductance L, de résistance R qui n'est le siège que d'une phénomène d'auto-induction est :



Commenté [A2]:

5) Les lois de l'électrocinétique sont-elles correctes pour la téléphonie mobile, la wifi et le Bluetooth ?

Pour une piste en cuivre de 10 cm alors $f \ll 3GHz$. Or la Wiffi, le Bluetooth sont typiquement à 2,5GHz !
Par exemple, une antenne (circuit ouvert), peut être le siège d'une onde de courant

6) Donner le champ magnétique rayonné par un solénoïde supposé infini traversé par un courant d'intensité $i(t)$ dans l'ARQS (n sera la densité linéique de spires)

Il suffit de reprendre le résultat du régime stationnaire :
$B = \mu_0 n i(t)$ (car les équation de Maxwell sont les mêmes)

7) Pourquoi la loi de Lenz traduit-elle une loi de modération ?

L'effet de modération (et pas d'annulation) se retrouve avec le signe - . Attention, la réponse inductive ne s'oppose au champ appliqué mais à ses variations.

8) Donner l'expression du flux propre ϕ_p d'un solénoïde de longueur l, de section S traversé par un courant d'intensité $i(t)$ (n sera la densité linéique de spires). En déduire l'inductance L du système (on négligera les effets de bord).

$\phi_p = N\mu_0 n i S = \mu_0 n^2 l S i(t)$
Donc $L = \mu_0 n^2 l S$

9) Par un raisonnement électrocinétique, montrer qu'un générateur doit fournir de l'énergie à un bobinage d'inductance L pour imposer un courant d'intensité I initialement nul. Que vaut donc cette énergie magnétique U_m ? En déduire l'existence d'une densité d'énergie électromagnétique u_m.

D'un point de vue électrique, on peut estimer, en convention récepteur, l'énergie emmagasinée U_m par un circuit d'inductance L sous une alimentation imposée :

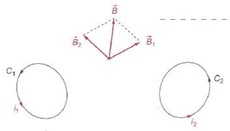
$U_m = \int_{t=0}^{t} L\frac{di(t)}{dt} i(t)dt = \int_{i(t=0)}^{i(t)} Li(t)di(t) = \left[\frac{Li^2(t)}{2}\right]_{i(0)}^{i(t)}$

Dans le cas d'une bobine initialement parcourue par aucun courant, la quantité $U_m = \frac{Li^2(t)}{2}$ donne l'énergie emmagasinée par la bobine à un instant t.

Donc : $U_m = \frac{\mu_0 n^2 l S i^2(t)}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0} Sl$

Donc : $u_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$

D'après le principe de superposition, lorsque deux circuits C_1 et C_2 sont en présence, le champ magnétique régnant en tout point de l'espace est la somme des champs créés par chacun des circuits.



Le phénomène d'induction apparaît lorsque le flux total $\phi(i_1, i_2)$ varie dans l'un ou l'autre circuit :

Effets inducteurs de $i_1(t)$	Effets inducteurs de $i_2(t)$
Auto-induction du circuit C_1 avec un flux propre $\phi_{p1} = L_1 i_1$	Auto-induction du circuit C_2 avec un flux propre $\phi_{p2} = L_2 i_2$
Induction du circuit 2 avec un flux mutuel $\phi_{1-2} = Mi_1$	Induction du circuit 1 avec un flux mutuel $\phi_{2-1} = Mi_2$

Dans cette situation couplée, on parle d'induction mutuelle car C_1 « agit » sur C_2 et C_2 « agit » sur C_1. M est appelé coefficient d'inductance mutuel et peut être positif ou négatif.

d) Equation de Maxwell-Faraday

Un circuit fixe, fermé, indéformable et filiforme baignant dans un champ magnétique $\vec{B}(M,t)$ est le siège d'un phénomène inductif vérifiant la loi de Faraday : $e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\iint_S (\vec{B}.d\vec{S}) = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.d\vec{S}$

Où S est une surface délimitée par le contour imposé par le circuit filiforme. Le contour et la surface ouverte sont orientés corrélativement avec la règle du tire-bouchon. Le courant induit qui apparaît est à associer à la circulation non nulle d'un champ électrique, appelé champ électromoteur. D'après le théorème de Stokes et par définition de la tension sur un circuit fermé :

$$e = \oint \vec{E_m}.d\vec{OM} = \iint_S \overrightarrow{rot E_m}.d\vec{S}$$

Par identification, on obtient l'équation de Mawxell-Faraday en régime variable : $\overrightarrow{rot E_m} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Comme $\overrightarrow{rot E_m} \propto \vec{B}$ alors :

- Le champ électromoteur est antisymétrique par rapport $\vec{B}$ et donc symétrique par rapport à la distribution de courant associée
- Les lignes de champ de $\vec{E_m}$ sont fermées et tournent localement autour de $\frac{\partial \vec{B}(M,t)}{\partial t}$

III- Equations de Maxwell en régime variable

a) Equation de Maxwell-Ampère en régime variable

Afin de vérifier l'équation de conservation de la charge, l'équation de MA introduit un vecteur densité de courant de déplacement $\vec{j_D}$:

$$\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\vec{j_D}$$

$$div(\overrightarrow{rot}\vec{B}) = \mu_0 div\vec{j} + \mu_0 div\vec{j_D} = 0$$

Soit $div\vec{j_D} = -div\vec{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$ d'après l'équation de conservation de la charge

Avec MG $\rho = \varepsilon_0 div\vec{E}$ et donc : $div\vec{j_D} = \varepsilon_0 \frac{\partial div\vec{E}}{\partial t} = div\left(\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$

Par identification : $\vec{j_D} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

L'équation de MA en régime variable est : $\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

b) Bilan

	Tout milieu et toute fréquence	Conducteur fermé en ARQS
Maxwell Gauss	$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$div\vec{E} = 0$
Maxwell Faraday	$\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Maxwell Flux	$div\vec{B} = 0$	$div\vec{B} = 0$
Maxwell Ampère	$\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	$\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j}$

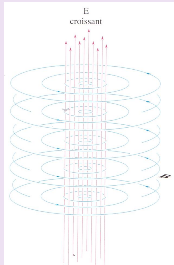
On notera le couplage des champs en régime variable : on parlera donc de champ électromagnétique.

Commenté [A3]:
10) Pourquoi M peut-il être négatif ?
L'inductance mutuelle et l'inductance propre sont les coefficients qui permettent de définir les flux magnétiques influençant deux circuits :
$\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}L_1 & M\\ M & L_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i_1\\ i_2\end{pmatrix}$
Par exemple $\phi_1 = L_1 i_1 + M i_2$
Si les courants sont positifs mais orientés en sens inverse alors $\phi_{2-1} < 0$ implique $M < 0$
11) Sommes-nous limités par le choix de la surface de contrôle de mesure du flux de $\vec{B}$ à travers un circuit fermé ?
Non car il s'agit d'un champ à flux conservatif : le flux à travers une surface ouverte ne dépend que du contour sur lequel elle repose.
12) En quoi un champ électromoteur est-il différent d'un champ électrostatique ?
Il est à rotationnel non nul : il peut donc entretenir un courant sur un circuit fermé !

13) Montrer que l'équation de MA en régime stationnaire ne vérifie pas l'équation de conservation de la charge (en régime variable). On vérifiera, à l'aide de l'opérateur nabla, que $div(\overrightarrow{rot}\vec{B}) = 0$
$div(\overrightarrow{rot}\vec{B}) = \vec{\nabla}.(\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = 0$
avec les propriétés des produits vectoriels.

L'équation de MA du régime stationnaire donne alors $div\vec{j} = 0$ et ne rend évidemment pas compte du régime variable.

La charge d'un condensateur impose également l'existence d'un autre vecteur densité autour duquel tourne $\vec{B}$



14) Quelles sont les équations de Maxwell en dehors des sources (c'est-à-dire dans le vide) ?

$div\vec{E} = 0$
$\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
$div\vec{B} = 0$
$\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

15) Vérifier que l'ARQS permet bien de négliger le courant de déplacement dans les conducteurs
Travailler en ARQS dans un conducteur fermé, de conductivité $\gamma \approx 10^8 S/m$, permet de faire une approximation dans l'équation de MA, en effet :
$\left\|\frac{\mu_0\vec{j}}{\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}\right\| \approx \frac{\gamma E}{\varepsilon_0 \omega E} \approx \frac{\gamma}{\varepsilon_0\omega} \approx \frac{10^{19}}{\omega} \ll 1$
L'équation de MA en ARQS dans les circuits fermés est $\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j}$

IV- Energie électromagnétique

a) Bilan d'énergie locale

Considérons une distribution de charges et de courants $\{\rho, \vec{j}\}$ créant un champ électromagnétique $\{\vec{E}, \vec{B}\}$: toutes ces grandeurs étant reliées dans les équations de Maxwell. Et manipulons un peu ces équations :

$$MA.\vec{E} \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{rot}\vec{B}.\vec{E} = \mu_0\vec{j}.\vec{E} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.\vec{E} = \mu_0\vec{j}.\vec{E} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial E^2/2}{\partial t}$$

$$MF.\vec{B} \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{rot}\vec{E}.\vec{B} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.\vec{B} = -\frac{\partial B^2/2}{\partial t}$$

Avec la formule de l'analyse vectorielle : $div(\vec{E}\wedge\vec{B}) = \overrightarrow{rot}\vec{E}.\vec{B} - \overrightarrow{rot}\vec{B}.\vec{E}$ alors :

$$-div(\vec{E}\wedge\vec{B}) = \mu_0\vec{j}.\vec{E} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial E^2/2}{\partial t} + \frac{\partial B^2/2}{\partial t}$$

$$-div(\vec{E}\wedge\vec{B}) = \mu_0\vec{j}.\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}\right) = -div\left(\frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}\right) - \vec{j}.\vec{E}$$

On va poser $u_{e,m} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$ et $\vec{\pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}$

Cette équation donne alors :

$$\frac{\partial u_{e,m}}{\partial t} = -div(\vec{\pi}) - \vec{j}.\vec{E}$$

Cette écriture rappelle celle d'un bilan d'une grandeur physique homogène à une énergie.

$\vec{\pi}$ ($[\pi] = [W.m^{-2}]$) est appelé vecteur de Poynting et $u_{e,m}$ désigne une quantité homogène à une densité volumique d'énergie électromagnétique

Ainsi la variation locale de la densité d'énergie électromagnétique a pour origine :

- Un bilan de flux non nul du vecteur de Poynting ($\vec{\pi}$ apparaît comme un vecteur densité de flux d'énergie EM)
- Une puissance échangée par le champ électromagnétique avec des charges mobiles

On notera que dans un milieu vide de charge : $\frac{\partial u_{e,m}}{\partial t} = -div(\vec{\pi})$

b) Bilan intégrale de l'énergie

Avec le théorème d'Ostrograski, un système de volume V et d'énergie électromagnétique $U_{e,m}(t) = \iiint_V u_{e,m}dV$ vérifie :

$$\frac{dU_{e,m}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\iiint_V u_{e,m}.dV = \iiint_V \frac{\partial u_{e,m}}{\partial t}.dV = -\iiint_V div(\vec{\pi})dV - \iiint_V \vec{j}.\vec{E}dV$$

$$\frac{dU_{e,m}(t)}{dt} = -\oiint \vec{\pi}.d\vec{S} - \iiint_V \vec{j}.\vec{E}dV$$

Ainsi l'énergie électromagnétique d'un volume V (délimité par une surface fermée S) varie dans le temps par la puissance échangée avec les charges contenue dans V et par un bilan de puissance électromagnétique globalement non nul dans S.

Dans le cas particulier d'un champ électromagnétique imposé à un conducteur de conductivité γ alors :

$$\frac{dU_{e,m}(t)}{dt} = -\oiint \vec{\pi}.d\vec{S} - \iiint_V \gamma E^2 dV$$

Dans un milieu vide de charge, on a $\frac{dU_{e,m}(t)}{dt} = -\oiint \vec{\pi}.d\vec{S}$

Commenté [A4]:

16) Que vous rappelle l'expression de $u_{e,m}$? Quelle est son unité ?

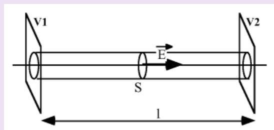
Les équations de maxwell contiennent un bilan d'énergie électrique et magnétique. On retrouve donc une équation bilan analogue à celle de la charge électrique, de la masse.

$u_{e,m} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$ est homogène à une densité d'énergie volumique

17) L'équation de conservation de la masse, de la charge et l'équation ci-contre sont comparables. Interpréter les termes analogues. Que signifie le terme $-\vec{j}.\vec{E}$?

$-\vec{j}.\vec{E}$ apparaît comme un terme de création (cas d'une antenne émettrice) ou comme un terme de consommation (cas d'une antenne réceptrice)

18) Soit un conducteur de section S, de rayon R, de longueur l, de conductivité γ siège d'un courant d'intensité I sous l'action d'un champ électrique $\vec{E}$ uniforme et associé à la ddp $V_1 - V_2 = U$. On néglige les effets de bords en supposant l infini et le régime est stationnaire.



Déterminer :

-Le champ magnétostatique

En dehors de la structure $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

-L'expression du vecteur de Poynting

$\vec{\pi} = -\frac{EB}{\mu_0}\overrightarrow{u_r}$

-La puissance rentrant à travers les parois du conducteur

$P = EIl = UI$

- La puissance dissipée par effet Joule

En régime stationnaire, cette puissance est $-UI$