

**Chapitre 2 : Interférence avec le dispositif des trous d'Young et par un réseau**

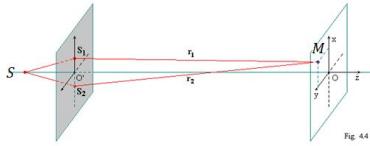
**I) Dispositifs des trous d'Young**  
**A) Hypothèses de travail**

Nous allons modéliser deux vibrations lumineuses cohérentes en supposant :

- qu'elles sont émises par un même atome et donc une source ponctuelle située en  $S$
- qu'elles sont parfaitement monochromatiques et donc associées à un train d'onde infini

**B) Les trous d'Young**

Les conditions précédentes sont réalisées avec un écran percé de 2 trous  $S_1$  et  $S_2$  distants de  $a$ . On observe l'éclairement à une distance  $D$  (l'ensemble baignant dans un milieu homogène d'indice  $n$ ). La source  $S$  quasi ponctuelle et monochromatique est obtenue à l'aide d'un laser éventuellement diaphragmé.



On utilise les dimensions suivantes :  $a \approx 0,5\text{mm}$ , taille des trous  $b \approx 0,1\text{mm}$ ,  $D \approx 1,5\text{m}$

Dans ces conditions, nous supposerons que les deux vibrations sont planes en  $M$ . L'amplitude de la vibration lumineuse totale est alors donnée par :  $a(M, t) = a_1(M, t) + a_2(M, t)$

$$\text{Avec } a_1(M, t) = A_0 \cos\left(\omega_0 t - \frac{2\pi}{\lambda_0}(S_1 M)\right)$$

$$\text{soit } a_1(M) = A_0 e^{-j\frac{2\pi}{\lambda_0}(S_1 M)}$$

$$\text{Et : } a_2(M, t) = A_0 \cos\left(\omega_0 t - \frac{2\pi}{\lambda_0}(S_2 M)\right)$$

$$\text{soit } a_2(M) = A_0 e^{-j\frac{2\pi}{\lambda_0}(S_2 M)}$$

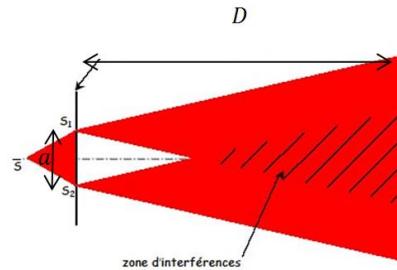
A noter que les fentes d'Young sont équivalentes à une superposition de trous d'Young et permettent simplement d'observer une figure plus lumineuse et plus étendue grâce à la diffraction.

**C) Expression théorique de l'éclairement**  
**1) Expression de la différence de marche**

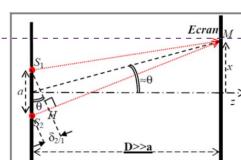
La différence de marche  $\delta$  (ou différence de chemin optique) est donné ici par :  $\delta = (S_2 M) - (S_1 M)$

**Nécessité de la diffraction**

Pour comprendre pleinement la possibilité d'une superposition de rayons passant par  $S_1$  et  $S_2$  il faut évoquer le phénomène de diffraction. Les trous  $S_1$  et  $S_2$  de diamètre  $b$  diffament la lumière ce qui créer deux cônes de lumière (d'ouverture angulaire de l'ordre de  $2\frac{\lambda_0}{D}$ ) pouvant se recouvrir.

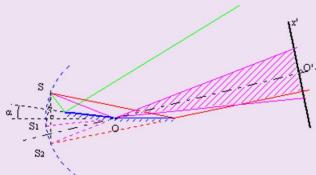
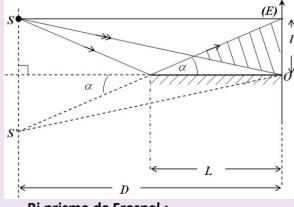


En exercice, on pourra être amené à apprécier directement que  $\theta \approx \frac{x}{D} \approx \frac{\delta}{a}$



**Commenté [A1]:** Bien que limité à trous d'Young, ce cours explique également d'autres dispositifs interférentiels se ramenant à deux sources ponctuelles distance de  $a$

- Miroir de Lloyd :



**Commenté [A2]:** Cohérente = émission par un même atome + différence de marche inférieur à  $\lambda_c$ .

**Commenté [A3]:** Une source étendue émet des vibrations non cohérentes en chaque point car elles sont inévitablement de pulsation et de phase à l'origine différentes en étant émises par des atomes différents.

On se rapproche de ce modèle avec un diaphragme

**Commenté [A4]:** Il s'agit là d'hypothèse forte car nous savons qu'aucune source n'est pas purement monochromatique. Elle va nous assurer une description simple des vibrations lumineuses. Seule la radiation émise par un laser se rapproche vraiment de ce modèle

**Commenté [A5]:** Il s'agit d'une expérience fondamentale. Elle a permis de vérifier le caractère quantique du photons en montrant qu'il est impossible de savoir dans quelle fente un photon passe : la mécanique décrit l'état d'une particule par une superposition des états possibles

**Commenté [A6]:** C'est un dispositif à division du front d'onde

**Commenté [A7]:** Pour traiter le cas des fentes d'Young étudiées à l'infini, on postule le principe d'Huygens.

Pour une fente, chaque point  $P$  centré autour de  $dS(P)$  rayonne une onde plane du type :

$$dA(M) = A_0 e^{-jkPM} dS(P)$$

On prend une référence : le centre de la fente  $PM = OM + \overrightarrow{OP} \cdot \vec{u}$

La superposition des vibrations sur des fentes identiques permet alors d'écrire :

$$a(M) = \int_{F_1} A_0 e^{-jk(O_1 M + \overrightarrow{O_1 P} \cdot \vec{u})} dS(P) + \int_{F_2} A_0 e^{-jk(O_2 M + \overrightarrow{O_2 P} \cdot \vec{u})} dS(P)$$

$$a(M) = (A_0 e^{-jk(O_1 M)} + A_0 e^{-jk(O_2 M)}) \int_{F_1} A_0 e^{-jk(\overrightarrow{O_1 P} \cdot \vec{u})} dS(P)$$

On conserve la référence des phases :

$$O_2 M = O_1 M + \delta_{\text{interférence}}$$

Le résultat obtenu est le même sauf qu'il faut apparaître rigoureusement un terme de diffraction.

Cette diffraction offre une ouverture angulaire de  $\frac{\lambda}{b}$

Pour être à la limite de cette ouverture liée à la diffraction, il faut  $\delta = \frac{a\lambda}{b}$  soit quelques  $\lambda$ . En lumière blanche, la longueur de cohérence est de l'ordre du  $1\mu\text{m}$  et viendra limiter l'observat

[1]

$$\overrightarrow{S_1M} = \overrightarrow{S_1O'} + \overrightarrow{O'M} \text{ et } \overrightarrow{S_2M} = \overrightarrow{S_2O'} + \overrightarrow{O'M}$$

$$\text{Ainsi : } S_1M^2 = (x - \frac{a}{2})^2 + y^2 + D^2$$

$$\text{Et : } S_2M^2 = (x + \frac{a}{2})^2 + y^2 + D^2$$

On trouve alors :  $S_2M^2 - S_1M^2 = 2ax$

En supposant  $x \ll D, y \ll D$  et sachant que  $a \ll D$  :

$$S_2M - S_1M \approx \frac{2ax}{2D} \text{ donc } \delta \approx n \frac{xa}{D}$$

### 2) Expression de l'éclairement

L'éclairement  $\mathcal{E}(M)$  au point  $M$  est donné par :

$$\mathcal{E} = K \underline{a}(M) \times \underline{a}^*(M)$$

$$\mathcal{E} = K \left( \left( \underline{a}_1(M) + \underline{a}_2(M) \right) \times \left( \underline{a}_1^*(M) + \underline{a}_2^*(M) \right) \right)$$

$$\mathcal{E} = KA_0^2 + KA_0^2 + 2KA_0^2 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta\right) = 2KS_0^2(1 + \cos\Delta\phi)$$

$$\mathcal{E} = 2\mathcal{E}_0(1 + \cos\Delta\phi)$$

Avec  $\Delta\phi$ , qui est la différence de phase entre les deux rayons, tel que  $\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta(x)$  et  $\mathcal{E}_0$  l'éclairement d'une source prise isolément.

### 3) Ordre d'interférence

L'éclairement présente donc une périodicité spatiale qui est rythmée par l'ordre d'interférence  $p$  défini par :

$$p = \frac{\Delta\phi}{2\pi} = \frac{\delta(x)}{\lambda_0} = \frac{nxa}{\lambda_0 D}$$

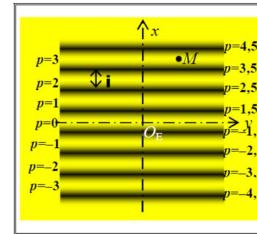
soit  $\mathcal{E}(M) = 2\mathcal{E}_0(1 + \cos(2\pi p))$ .

- On observe des zones d'éclairement constant pour  $\frac{1}{\lambda_0} \frac{nxa}{D} = \text{Cte}$  c'est-à-dire pour des valeurs de  $x$  constantes : il s'agit de franges parallèles à l'axe  $Oy$
- Les franges brillantes vérifient  $2\pi p = 2\pi m$  soit  $p = m$  ou  $\delta = m\lambda_0$  avec  $m \in \mathbb{Z}$ . On parle alors d'interférence constructive. Cette situation correspond à la superposition en un point de deux vibrations en phase.
- Les franges sombres vérifient  $(2m+1)\pi = 2\pi p$  soit  $p = m + \frac{1}{2}$  ou  $\delta = (m + \frac{1}{2})\lambda_0$  avec  $m \in \mathbb{Z}$ . On parle alors d'interférence destructive. Cette situation correspond à la superposition en un point de deux vibrations en opposition de phase.

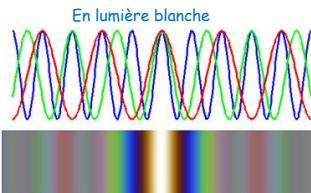
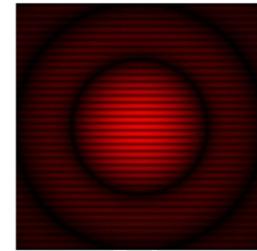
Calculons alors l'interfrange  $i$ , c'est-à-dire la distance séparant deux franges brillantes ou sombres :

$$p(x+i) - p(x) = 1 \text{ soit } i = \frac{\lambda_0 D}{na}$$

Avec notre dispositif et  $\lambda_0 = 500\text{nm}$   $i \approx 1,5\text{mm}$



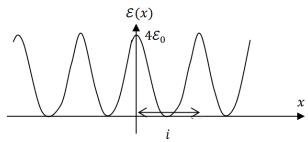
En lumière monochromatique



**Commenté [A8]:** On limite le champ d'observation mathématiquement ce qui est en accord avec le fait que la figure d'interférence est limitée dans l'espace. On parle quand même d'interférence non localisée en ce sens où la zone d'interférence est quand même un peu étendue

**Commenté [A9]:** Beaucoup de littératures parlent d'intensité lumineuse plutôt que d'éclairement

**Commenté [A10]:** Il est déjà notable de voir que l'on peut avoir une amplification apparente de 4 par rapport à un trou seul. Il s'agit en fait d'une modulation de l'éclairement



D) Expression réelle de l'éclairement : cohérence spatiale et cohérence temporelle

Expérimentalement l'éclairement observé est plutôt donné par :  $E(M) = 2E_0(1 + V \cos(2\pi p))$  où  $V$  est le facteur de visibilité ( $|V| \leq 1$ ).

On définit le contraste  $C$  ( $0 \leq C \leq 1$ ) des franges afin d'apprécier le degré de cohérence des deux ondes c'est-à-dire leur « capacité à interférer » :

$$C = \frac{E_{\max} - E_{\min}}{E_{\max} + E_{\min}} = \frac{(1 + |V|) - (1 - |V|)}{(1 + |V|) + (1 - |V|)} = |V|$$

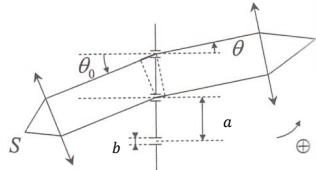
Les causes d'affaiblissement du contraste sont :

- une source  $S$  qui n'est pas ponctuelle. On a superposition et brouillage des figures d'interférence de chaque points sources (incohérentes entre elles)
- une source  $S$  qui n'est pas monochromatique. On a superposition et brouillage des figures d'interférence de chaque vibration monochromatique (incohérentes entre elles)

II) Interférence avec un réseau par transmission

A) Présentation

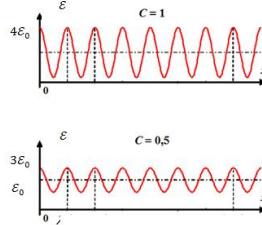
Un réseau par transmission est constitué de  $N$  fentes parallèles, équidistantes d'une distance  $a$  (on parle de pas du réseau) et de même largeur  $b$ . Typiquement, nous aurons  $a \approx 1,5\mu\text{m}$ ,  $N = 10000$ ,  $b \approx 500\text{nm}$ .



On éclaire un réseau avec un pinceau de lumière parallèle de longueur d'onde  $\lambda_0 = 500\text{nm}$  (dans le vide) et on observe la figure d'interférence à l'infini. Les ondes diffractées par chaque motif interfèrent du fait de leur cohérence.

Contraste

Un contraste unitaire est associé à  $E_{\max} = 4E_0$  et  $E_{\min} = 0$



**Commenté [A11]:** Les interférences en lumière blanche superposent les figures d'interférence (on parle d'irisation) [http://cyan1.grenet.fr/podcastmedia/montrer-de-la-physique/Young\\_animation\\_OK.m4v](http://cyan1.grenet.fr/podcastmedia/montrer-de-la-physique/Young_animation_OK.m4v)

[http://web.cortial.net/bibliohtml/young\\_2s\\_j.html](http://web.cortial.net/bibliohtml/young_2s_j.html)

[http://web.cortial.net/bibliohtml/int\\_2l\\_j.html](http://web.cortial.net/bibliohtml/int_2l_j.html)

**Commenté [A12]:** On montre en effet que le contraste n'est que faiblement altéré si les trous de ne sont pas exactement de même de la même taille.

Dans le cas où  $C = 0,5$  on observe des franges moins brillantes sur un fond uniforme  $E_{\min} \neq 0$  : ces franges sont donc moins visibles.  $C = 0$  correspond à un écran uniforme.

Cohérence spatiale et temporelle

La source  $S$  n'est pas ponctuelle mais possède une certaine étendue spatiale. Chaque point source émet des ondes incohérentes avec les autres (pulsations différentes et phases à l'origine différentes). L'éclairement est alors la somme des éclairements associés à chaque point. Ces figures d'interférence sont décalées et se brouillent, si le contraste reste bon (source peu étendue) alors on dit qu'il y a cohérence spatiale

La source  $S$  n'est pas monochromatique, mais émet dans une certaine largeur spectrale. Chaque longueur donne son propre système de frange avec son interfrange  $i = \frac{\lambda D}{a}$  : les franges se brouillent. Si le contraste reste bon, on dit qu'il y a « cohérence temporelle » (cas des spectres étroits)

**Commenté [A13]:** Ce réseau peut être obtenu par gravures de sillons sur une plaque en verre ou par holographie

B) Interférences constructives à  $N$  ondes

L'additivité des amplitudes complexes de vibration cohérentes entre elles conduit à une amplitude résultante maximale si toutes les ondes sont en phase.

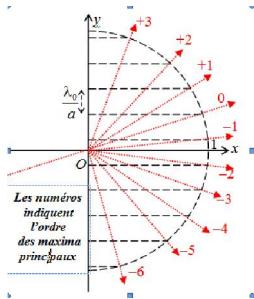
L'éclairement résultant d'interférence entre  $N$  ondes cohérentes présente un maximum lorsque toutes les ondes sont en phase (c'est-à-dire avec un même chemin optique à  $m\lambda$  près avec  $m \in \mathbb{Z}$ )

C) Relation fondamentale des réseaux

Entre deux rayons successifs, on mesure la différence de marche  $\delta = a(\sin\theta - \sin\theta_0)$

On obtient donc des maxima d'interférence dans les directions  $\theta_m$ :  $a(\sin\theta_m - \sin\theta_0) = m\lambda_0$

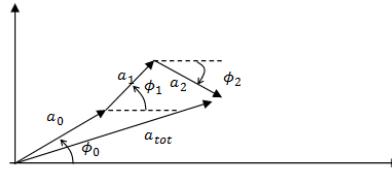
En incidence normale:  $\sin\theta_m = \frac{m\lambda_0}{a}$  et comme  $\frac{m\lambda_0}{a} \leq 1$  alors  $m \leq \frac{a}{\lambda_0}$  donc on peut observer les ordres  $-3, -2, -1, 0, 1, 2$  et  $3$



Il est remarquable d'observer que  $\theta_m(\lambda)$  (pour  $m \neq 0$ ): le réseau disperse la lumière car pour un ordre  $K$  donné le rouge est plus dévié que le bleu (on obtient un spectre).

## Représentation de Fresnel

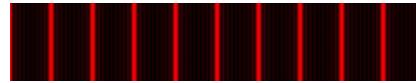
On peut comprendre les résultats ci-contre en représentant vectoriellement l'amplitude complexe de chaque onde. Par exemple pour 3 vibrations:  $a_0 e^{i\phi_0}, a_1 e^{i\phi_1}, a_2 e^{i\phi_2}$ , on a :



On comprend alors qu'en superposant des ondes en phase, la vibration totale  $a_{tot}$  soit d'amplitude  $a_{tot}$  maximale.

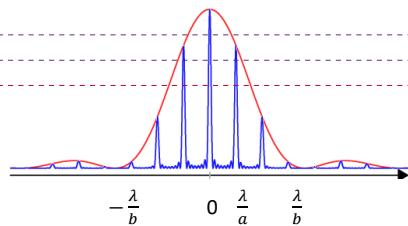
## Spectre obtenu par un réseau

Si les angles  $\theta_m$  restent petits, alors  $\theta_m = \frac{K\lambda_0}{a}$  : la dispersion est alors linéaire par rapport à la longueur d'onde et cette dispersion est d'autant plus grande que le pas du réseau  $a$  est petit.



On peut représenter facilement la direction des maxima en dessinant le cercle trigonométrique et en représentant la valeur  $\sin\theta_m$  sur le réseau.

En toute rigueur la diffraction atténue l'éclairement :



**Commenté [AM18]:**  $\underline{s}_{tot}(M)$  peut s'écrire sous la forme d'une somme :

$$\underline{s}_{tot}(M) = S e^{jk(O_1 M)} (1 + e^{-jk\delta} + e^{-2jk\delta} + \dots + e^{-Njk\delta})$$

A noter que cette relation permet d'obtenir l'éclairement en remarquant que :

$$\begin{aligned} \underline{s}_{tot}(M) &= \frac{S e^{jk(O_1 M)} (1 + e^{-Njk\delta})}{(1 + e^{-jk\delta})} = \frac{S e^{jk(O_1 M)} e^{-\frac{Njk\delta}{2}} \left( e^{\frac{Njk\delta}{2}} + e^{-\frac{Njk\delta}{2}} \right)}{e^{-\frac{jk\delta}{2}} \left( e^{\frac{jk\delta}{2}} + e^{-\frac{jk\delta}{2}} \right)} = \\ &= \frac{S e^{jk(O_1 M)} e^{\frac{Njk\delta}{2}} \sin\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{e^{-\frac{jk\delta}{2}} \sin\left(\frac{\delta}{2}\right)} \\ \underline{s}(M) &= \underline{s}_{max} \left( \frac{\sin\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{N \sin\left(\frac{\delta}{2}\right)} \right)^2 \end{aligned}$$

**Commenté [A14]:** On pourra noter que la diffraction n'est pas limitant puisqu'elle annule l'intensité pour  $\sin\theta = \frac{\lambda}{b} = 1$  soit  $\theta = 90^\circ$

**Commenté [A15]:** Comme le prisme, mais avec une meilleure résolution ou pouvoir séparer entre deux longueur d'onde : typiquement  $10^{-3}$  rad/nm pour le réseau et  $10^{-4}$  rad/nm pour le prisme.

**Commenté [A16]:** C'est l'inverse pour un prisme

**Commenté [AM17]:** On pourra noter que la dispersion augmente avec l'ordre en différenciant la relation fondamentale des réseaux en incidences normale :

$$\cos\theta_m d\theta_m = \frac{m}{a} d\lambda = \sin\theta_m \frac{d\lambda}{\lambda}$$

$$d\theta_m = \tan\theta_m \frac{d\lambda}{\lambda}$$

Quand  $m$  augmente  $\theta_m$  augmente également et donc l'aptitude à séparer deux  $\lambda$  aussi

Pour traiter le cas des fentes d'Young étudiées à l'infini, on postule le principe d'Huygens.

Pour une fente, chaque point  $P$  centré autour de  $dS(P)$  rayonne une onde plane du type :

$$d\underline{a}(M) = A_0 e^{-jkPM} dS(P)$$

On prend une référence : le centre de la fente  $PM = OM + \overrightarrow{OP} \cdot \vec{u}$

La superposition des vibrations sur des fentes identiques permet alors d'écrire :

$$a(M) = \int_{F1} A_0 e^{-jk(O_1 M + \overrightarrow{O_1 P} \cdot \vec{u})} dS(P) + \int_{F2} A_0 e^{-jk(O_2 M + \overrightarrow{O_2 P} \cdot \vec{u})} dS(P)$$

$$a(M) = (A_0 e^{-jk(O_1 M)} + A_0 e^{-jk(O_2 M)}) \int_{F1} A_0 e^{-jk(\overrightarrow{O_1 P} \cdot \vec{u})} dS(P)$$

On conserve la référence des phases :

$$O_2 M = O_1 M + \delta_{interference}$$

Le résultat obtenu est le même sauf qu'il faut apparaître rigoureusement un terme de diffraction.

Cette diffraction offre une ouverture angulaire de  $\frac{\lambda}{b}$ .

Pour être à la limite de cette ouverture liée à la diffraction, il faut  $\delta = \frac{a\lambda}{b}$  soit quelques  $\lambda$ . En lumière blanche, la longueur de cohérence est de l'ordre du  $1\mu\text{m}$  et viendra limiter l'observation du nombre de franges. Avec un laser, c'est la diffraction qui limitera le nombre de franges